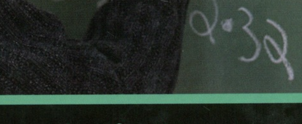
هبة نصر قعدان

الرياضيات

- معادلات الرتبة الأولى
- المحددات
- مفاهيم عامة في التوابع والاستمرار والاشتقاق
- المشتقات
- مجموعات الأعداد



www.darsafa.net

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الرياضيات

الرياضيات

- معادلات الرتبة الأولى
- المحددات
- مفاهيم عامة في التوابع والاستمرار والاشتقاق
- المشتقات
- مجموعات الأعداد

هبة نصر قعدان

الطبعة الأولى

2014م- 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (2011 /1 /456)

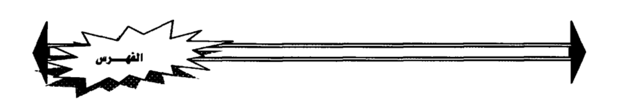
510
قعدان، هبة نصر
الرياضيات: معادلات الرتبة الأولى/ هبة نصر قعدان. ــ عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع 2011.
( ) ص
ر. أ: 2011/1/456
الواصفات: ///الرياضيات//

❖ يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومية أخرى

الطبعة الأولى
2014م – 1435هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع
عمان ـ شارع الملك حسين ـ مجمع الفحيص التجاري ـ تلفاكس 4612190 6 962+
هاتف: 4611169 6 962+ ص. ب 922762 عمان ـ 11192 الأردن
DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: +962 6 4612190- Tel: + 962 6 4611169
P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
http://www.darsafa.net
E-mail:safa@darsafa.net
ISBN 978-9957-24-711-9 ردمك



الفهرس

الفصل الأول: معادلات الرتبة الأولى ٩

طرق مباشرة ٩

طرق التعويض ٢٠

المعادلة الخطية ٢٨

معادلات خاصة لا خطية ٣٧

المعادلات المحكمة ٤٤

معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الأولى ٥١

تطبيقات على معادلات الفروق ٥٩

الدوائر الكهربائية البسيطة ٦٨

منحنيات المطاردة ٧٤

التحليل، الحجرات ٨٢

التمارين ٨٩

الفصل الثاني: المحددات ٩٥

اقتران المحدد ٩٥

حساب المحدد للمصفوفة المربعة ٩٥

خصائص المحددات ١٠٣

المصفوفة المصاحبة ١١٢

نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب ١١٣

المصفوفة المنفردة وغير المنفردة ١٢٣

المصفوفة المحتواه ١٢٤

درجة المصفوفة ١٢٤
المصفوفات ونظم المعادلات الخطية ١٢٧
طرق حل أنظمة المعادلات الخطية ١٣٢
تمارين ١٤٨
الفصل الثالث: مفاهيم عامة في التوابع والاستمرار والاشتقاق ١٥٧
الخواص الجبرية للتوابع الحقيقة ١٥٨
متطابقات وعلاقات شهيرة في التوابع المثلثية ١٦٤
علاقات ومتطابقات شهيرة في التوابع القطعية ١٦٨
نهايات التوابع ١٧١
خواص النهايات ١٧٧
الاشتقاق والتفاضل ١٨٦
المعنى الهندسي للمشتق ١٨٧
قاعدة الاشتقاق الضمني ١٩٥
طريقة الاشتقاق بواسطة اللوغاريتم ١٩٩
تمارين ٢١٣
الفصل الرابع: المشتقات ٢١٩
جدول المشتقات ٢١٩
الاشتقاق اللوغاريتمي ٢٢٢
تمارين ٢٣٥
الفصل الخامس: مجموعات الأعداد ٢٤٧
مجموعة الأعداد الطبيعية ٢٤٧
بديهات بيانو ٢٤٧
من الخواص الجبري لمجموعة الأعداد الطبيعية ٢٤٨
أ) الجمع ٢٤٨
ب) الضرب ٢٤٨
ج) الترتيب ٢٤٨
تمارين ٢٥٣



معادلات الرتبة الأولى



الفصل الأول

معادلات الرتبة الأولى

قد يكون حل معادلة من الرتبة الأولى، تفاضلية كانت أو معادلة فرق، أمراً صعباً جداً، ذلك أنه ليس هنالك طريقة عامة تصلح لجميع الحالات، وفي هذا الفصل ندرس بعضاً من أنجح الطرق لحل معادلة الرتبة الأولى.

وسنرى من هذا الفصل و الفصول التالية أن مقدرتنا على حل المعادلات التفاضلية الخطية لا يحدها سوى قدرتنا على إجراء تكاملات قائمة على قاعدة نظرية ناضجة، وسنرى من ناحية أخرى أن عديداً من الطرق تلزم للتأني للمعادلات غير الخطية، ولكن ليس هنالك ما يضمن أن أياً منها ستنتج، لهذا ستبدو الطرق التي نعرضها كأنها حشد من الحيل.

إنها على كل حال تقوم على ثلاثة مبادئ أساسية:

التعويض، وفصل المتغيرات، والضرب باقتران مناسب.

(١-١) طرق مباشرة

خذ المعادلة التفاضلية التالية، وهي من الرتبة الأولى:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق (س، ص)} \qquad \text{(١-١)}$$

فإذا أمكن كتابة الاقتران ق (س، ص) بحيث لا يشتمل على الدالة المتغيرة ص، فعندها تحل المعادلة بمكاملة طرفيها بالنسبة إلى س.





المثال (١):

$\frac{دص}{دس} = \frac{س+س ص}{١+ص}$ فبعد اختزال العامل المشترك (١+ص) من البسط والمقام في الطرف الأيسر، يبقى في هذا الطرف س، ويكون:
الطرف س، ويكون:

$$ص = \int س\, د س = \frac{س^{٢}}{٢} + ث$$

وواضح أن هذه الطريقة تصح مع معادلات من رتب أعلى، من النوع $ص^{(ن)}$ = ق (س).

وبمثل هذه السهولة تجد طريقة فصل المتغيرات، وهي تستعمل حيث يمكن تحليل ق (س، ص) الى الشكل:

ق (س، ص) = $\frac{ك(س)}{ل(ص)}$، حيث ك (س)، ل(س) كل منهما اقتران بمتغير واحد، فعندها تكتب المعادلة (١-١) على النحو ل (ص) $\frac{دص}{دس}$ = ك (س).

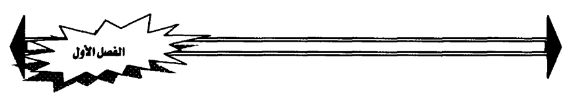
فنكامل طرفي المعادلة بالنسبة إلى س، ونغير متغيرات الطرف الأيمن فينتج:

$\int$ل (ص) دص = $\int$ل (ص) $\frac{دص}{دس}$دس= $\int$ك (س) دس + جـ.

المثال (٢)

$\frac{دص}{دس}$= ٢ س ص نكتب هذه المعادلة بالشكل $\frac{١}{ص}$ دص= ٢س دس بحيث





يجري تغير المتغيرين تلقائياً، ونكامل الطرفين، فينتج ا ص = س^{٢}= + ج، أو بلغة الأس:

$$ص = هـ^{س^{٢}+ج} = هـ^{ج} هـ^{س^{٢}} = ج هـ^{س^{٢}}$$

وهذا هو الحل العام للمعادلة، وهو يحتوي على ج$_{١}$، وهذا ثابت حقيقي غير محدد، ولذا فالمعادلات التفاضلية ص =٢ س ص عدد لا نهاية له من الحلول، حسب القيمة التي نعطيها للثابت ج$_{١}$.

إذا عينا شرطاً ابتدائياً يضاف الى المعادلة التفاضلية في المثال (٢) فعندها يعين هذا الشرط حل لمسألة القيمة الابتدائية كاملاً، فمثلاً اذا كان الشرط الابتدائي ص (١) = ٢، فبتعويض س = ١ في الحل العام، ينتج ٢ = ص = ص (١) = ٢، هو: ص = ٢ هـ$^{س^{٢}-١}$

والحصول على حل وحيد لمسألة قيم ابتدائية يلزم أن نعين شرطاً ابتدائية بقدر رتبة المعادلة، وسنثبت هذه الحقيقة.

المثال (٢) حصلنا على المعادلة الحركية:

$$\frac{دع}{دن} = ع\,(B - \delta ع)، \quad .... (١-٢)$$

حيث B، δ

ثابتان معطيان فنفصل المتغيرين فينتج:

$$\frac{دع}{ع(ل - \delta ع)} = د ن \quad .... (١-٣)$$

ويسهل أن نتحقق من أن:

$$\frac{١}{ع(-\delta ع)} = \frac{١}{B ع} + \frac{\delta}{(\delta ع)}$$

فبتعويض الطرف الأيسر من هـذه المعادلـة في (١-٣)، واجـراء التكامـل، ينتج:

$$\frac{1}{B}\,\text{ل ي ع} - \frac{1}{B}\,\text{ل ي}\,(B - S\text{ع}) = \text{ن} + \text{جـ}$$

أي أن م

$$\text{لي}\ \frac{(\text{ع})^{\text{٠/١}}}{(B - S\text{ع})} = \text{ن} + \text{جـ}$$

فالبرفع والتعبير عن الثابت الاعتباطي هـ^جـ بالرمز جـ، ينتج

$$\frac{\text{ع}}{B - S\text{ع}} = \text{جـ هـ}^{B\text{ن}} \qquad \text{(١-٤)}$$

[تنبيه: سينتج مثل هذه الاجراءات في الثوابت دون التنبيه الى ذلك]

والان نعوض ن = ٠،

فينتج:

$$\frac{\text{ع}(٠)}{B - S\text{ع}} = \text{جـ}، \qquad \text{(١-٥)}$$

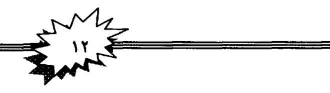
نعوض قيمة هذه في المعادلة (١-٤) فينتج:

$\frac{\text{ع(ن)}}{B - S\text{ع(ن)}} = \frac{\text{ع}(٠)}{B - S\text{ع}(٠)}\,\text{هـ}^{\text{هـ ن}}$ وبالـضرب التـصالبي وايجـاد ع (ن)، نحصل على النتيجة:

$$\text{ع (ن)} = \frac{B}{S + [B\text{ع}(٠) - S]\,\text{هـ}^{-B\text{ن}}} \qquad \text{(١-٦)}$$

وكثيراً ما يكون من المفيد كتابة المعادلة بالصيغة

د ص – ق (س، ص) د س= ٠



وعندها يصير بالامكان أن نضرب المعادلة باقتران فنحصل على تفاضلة اقتران آخر معروف.

المثال (٣):

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ص}{س + س^{٢} ص^{٢}}$ نعيد كتابة المعادلة بالصيغة

$(س + س^{٢} ص^{٢})$ د ص − ص د س = ٠، ونعيد ترتيبها بالصيغة

$س^{٢} ص^{٢}$ د ص + (س د ص − ص د س) = ٠ .... (١- ٧)

فالقوسان يذكران بالصيغة التفاضلية

$د \left(\frac{ص}{س}\right) = \frac{س د ص - ص د س}{س^{٢}}$ ....(١-٨)

فنقسم المعادلة (١-٧) على $س^{٢}$ وينتج $د \left(\frac{ص^{٣}}{٣}\right) + د \left(\frac{ص}{س}\right) = ٠$،

وبالتكامل، ينتج $\frac{ص^{٣}}{٣} + \frac{ص}{س} = جـ$.

والصيغ التفاضلية التالية كثيراً ما تفيد في حالات مماثلة:

$د \left(\frac{س}{ص}\right) = \frac{ص د س - س د ص}{ص^{٢}}$ ....(١- ٩)

د (س ص) = س د ص + ص د س، .... (١- ١٠)

$د (س^{٢} + ص^{٢}) = ٢$ (س د س + ص د ص)، .... (١- ١١)

$د \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \frac{ص د س - س د ص}{\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}}$

$$د\left(ظا^{-1}\frac{س}{ص}\right)=\frac{ص\,دس-س\,د\,ص}{س^{2}ص^{2}}$$ ....(١-١٣)

$$د\left(لي\frac{س}{ص}\right)=\frac{ص\,دس-س\,دص}{س\,ص}$$ ....(١-١٤)

المثال (٤):

السقوط الحر حسب قانون نيوتن الثاني في الحركة: اذا اثرت قوة ق على جسم كتلة ك، فإن الجسم يسير بتسارع ت حيث ت = $\frac{ق}{ك}$. أي أن ق = ك ت. فإذا سقط جسم سقوطاً حراً بتأثير الجاذبية الأرضية، فالقوة المؤثرة عليه هي وزنه ك جـ حيث هو تسارع الجاذبية (ويمكن اعتباره على سطح الأرض ثابتاً يساوي ٣٢ قدماً في الثانية) فليكن ص ارتفاع الجسم فوق سطح الأرض، فيكون تسارع الجسم إلى أعلى $\frac{د^{2}ص}{دن^{2}}$

$$ك\,\frac{دص}{دن^{2}}=-ك\,حـ$$ ....(١-١٥)

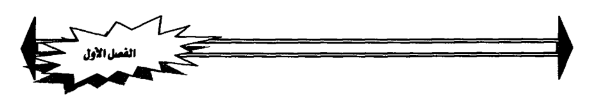
والإشارة السالبة تشير الى أن الجاذبية تؤثر الى أسفل، فبالاختصار والمكاملة، ينتج:

$$\frac{دص}{دن}=-حـ+ع_{٠}$$ ....(١-١٦)

حيث $ع_{٠}$ هي سرعة الجسم عند ن= ٠ تكامل مرة اخرى، فينتج:

$$ص=\frac{1}{2}حـ\,ن^{2}+ع_{٠}\,ن+ص_{٠}$$ ....(١-١٧)

حيث $ص_{٠}$ هو ارتفاع الجسم عن ن = ٠



السقوط المعّوق اذا أخذنا بعين الاعتبار أن الهواء يبذل قوة مقاومة تتناسب مع سرعة الجسم، تصبح المعادلة (١-١٥) بالشكل.

$$\frac{د^٢ص}{دن^٢} = - ﺣ - ث \frac{دص}{دن} ، ث > ٠ \quad\text{..............................(١-١٨)}$$

(والإشارة السالبة في الحد الأخير تشير الى ان مقاومة الهواء تحدث تباطؤاً.)

$$\frac{دع}{دن} = - ﺣ - ث ع، \quad\text{..............................(١-١٩)}$$

ونفصل المتغيرين، فينتج $\int \frac{دع}{ث ع + ح} = - \int د ن + ث_١$

فيكون:

$$\frac{١}{ن} ل ي (ث ع + ﺣ) = -ن + ث_١$$

وبعد الرفع ينتج

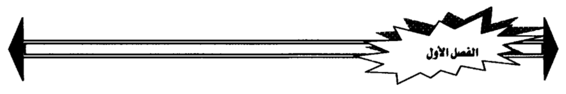
$$ع = - \frac{ح}{ث} + ث_٢ هـ^{-ث ن} \quad\text{..............................(١-٢٠)}$$

ولأن ث > ٠، فإن ع ← - $\frac{ح}{ث}$ عندما ن ← ∞. وهذه السرعة التي يؤول اليها الجسم نسميها حد السرعة Termind Velocity. في (١- ٢٠): إذا جعلنا ن = ٠ نستنتج أن $ث_٢ = ع_٠ + ٠$. فإذا كانت $ع_٠ = ٠$ ينتج أن:

$$ع = \frac{ح}{ث} (هـ^{-ث ن} - ١)$$

ولايجاد الارتفاع ص في أي لحظة ن، نجري عملية تكامل ثانية على المعادلة (١-٢٠).

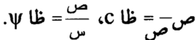




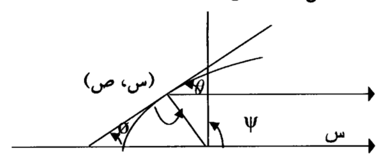
المثال (٥):

كيف يجب أن تكون هيئة مرآة منحنية بحيث تكون أن النور الساقط عليها من مصدر في نقطة الأصل ينعكس موازياً محور س؟

نعلم من التماثل أن سطح المرآة سطح دوراني ينجم عن دوران منحنى حول محور س. فلتكن (س، ص) أي نقطة على المقطع العرضي للسطح، في المستوى س ص (انظر الشكل (١-١)). ينص قانون الانعكاس على أن زاوية السقوط α تساوي زاوية الانعكاسB. فيكون α = B =c ولأن مجموع الزوايا الداخلة في المثلث ١٨٠° ينتج أن $\psi = \alpha + c = ٢\,c$. والمهم في أمر c، ψ أن:



$$ص\bar{} = \text{ظا}\ c،\quad \frac{ص}{س} = \text{ظا}\ \psi.$$



الشكل (١-١)

فباستعمال العلاقة المثلثية لظل ضعف الزاوية ينتج أن:

$$\frac{ص}{س} = \text{ظا}\ \psi = \text{ظا}\ ٢\,c = \frac{\text{ظا}٢}{\text{ظا}^{٢} = ١-} = \frac{٢\,\overline{ص}}{١ - (\overline{ص})^{٢}}$$

نحل المعادلة لإيجاد صَ، فنحصل على المعادلة التربيعية:

$$ص\,(صَ)^{٢} + ٢\,س\,صَ - ص = ٠\ ،$$



فحسب قاعدة المعادلة التربيعية يكون: $ص^{-} = \frac{-س \pm \sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}}{ص}$

وهذا يكتب بالشكل: $س\ د\ س + ص\ د\ ص = \pm \sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}\ د\ س$

فحسب المعادلة (١-١٢)

ينتج أن $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}$ ± س جـ، وبتربيع الطرفين،

$ص^{٢} = \pm ٢\ حـ\ س + حـ^{٢}$

وهذه معادلة فصلية مقطوع مكافئة بؤرتها في نقطة الأصل وهي تتماثل بالنسبة الى محور س.

التمارين (١-١)

في التمارين ١ الى ٢٠، أوجد الحل العام، صريحاً إذا أمكن، والا فأوجد علاقة تعرّف الحل ضمنياً. وحيث يذكر شرط ابتدائي، أوجد الحل الخاص الذي يحققه:

١. $\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{س}}{٢ص}$

٢. $س\ ص^{-} = ٣\ ص$، $ص(٢) = ٥$

٣. $\frac{دص}{دس} = \frac{هـ^{ص}س}{هـ^{ص} + س^{٢}هـ^{ص}}$

٤. $\frac{دس}{دص} = س\ جتا\ ص$، $س(\pi/٢) = ١$

٥. $\frac{دع}{دق} = ق^{٢}(١ + ع^{٢})$

٦. $\frac{د ص}{د س}$ + ص = ص (س هـ$^{س^٢}$ + ١)، ص (٠) = ١

٧. $\frac{د ف}{د ق}$ = ف (جتا ق + جا ق)

٨. $\frac{د ص}{د س}$ = ص^٢ (١ + س^٢)، ص (٠) = ١

٩. $\frac{د م}{د ن}$ + ٢ م = م ن^٢، م (٠) = ١

١٠. $\frac{دص}{د س} = \sqrt{١ - ص^٢}$

١١. (١ + س) د ص + ٣ ص د س = ٠، ص (٦) = ٧

١٢. $\frac{د س}{د ن}$ + (جتا ن) هـ^{س} = ٠

١٣. (ص + ٣) د س + جتا س د ص = ٠

١٤. $\frac{د س}{د ن}$ = س (١ − جا ٢ ن)، س (٠) = ١

١٥. $\sqrt{١ - س^٢}$ د ص + $\sqrt{١ - ص^٢}$ د س = ٠

١٦. (جاس جتاص) د س+ (جتا س جا ص) د ص = ٠، ص (٠) = ٠

١٧. س^٢ د ص + ص^٢ د س = ٠، ص (١) = ١

١٨. $\frac{دص}{د س} = \frac{ص^٣ ٢ص}{س^٢ ٣س}$، ص (١) = ١

١٩. هـ^{س} $\left(\frac{د س}{د ن} + ١\right)$ = ١، س (٠) = ١

٢٠. (ل^٢ − ٢ ل − ٨) دم = (م^٢ + م − ٢) ٢ ل، م (٠) = ٠

٢١. إفرض مجتمعاً ع (ن) يتكاثر حسب المعادلة الحركية د ع/ د ن = ع (α - B ع). برهن أن سرعة النمو تكون في نهايتها العظمى عندما يكون العدد نصف العدد الذي ستقر المجتمع عليه.

٢٢. في مزرعة بروتوزوا تقدم البكتيريا غذاء، بمعدل ثابت مقداره؟. وقد لوحظ انها تستهلك بسرعة تتناسب مع مربع عددها. فتركيز البكتيريا إذن ك (ن) يحقق المعادلة التفاضلية ٢ ك/ ٢ ن = μ - λك^{٢}، حيث λ ثابت موجب.

أ) عبر عن ك (ن) بدلالة ك (٠).

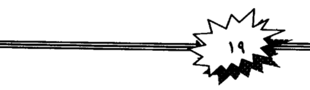
ب) كم يكون التركيز في حالة الاستقرار؟

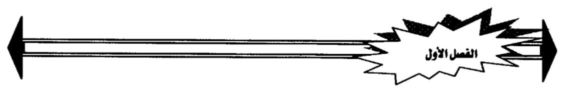
٢٣. في بعض التفاعلات الكيمائية تعمل بعض النواتج وسائط ذاتية لانتاج المزيد منها. فإذا كان س (ن) مقدار ناتج منها في الزمن ن، فإن المعادلة التفاضلية د س/ د ن = α (B- س) هي نموذج محتمل لهذا التفاعل، حيث α و B إذ عندها تكون إحدى المواد الكيميائية قد استنفدت.

أ) حل المعادلة بدلالة الثوابت α و B، س (٠)

ب) على فرض أن α= ١، B = ٢٠٠، س (٠) = ٢٠، ضع رسماً بيانياً يعطي س (ن)، ن >

٢٤. في احد الأيام بدأ الثلج يتساقط في الصباح الباكر، واستمر بسرعة ثابتة. فإذا كانت سرعة الجرافة التي تزيحه من الشوارع تتناسب عكسياً مع ارتفاع الثلج المتراكم، وبدأت عملها الساعة ١١ صباحاً، وفي الساعة ٢ بعد





الظهر كانت قد ازاحت الثلج عن ٤ أميال من الطريق، وفي الساعة ٥ كانت قد أخلت ميلين آخرين. متى بدأ الثلج يسقط؟

٢٥. صهريج كبير مفتوح على شكل نصف كرة قطرها خمسون قدماً، وهو مملوء بالماء، وفي آخره ثقب مستدير قطره قدمان. فحسب قانون تور يشللي(*)، يتدفق الماء من الثقب بسرعة تعادل سرعته لو سقط سقوطاً من سطح الماء الى موضع الثقب. كم يمضي من الزمن حتى ينفذ ماء الصهريج؟

٢٦. في التمرين ٢٥: صف هيئة الصهريج عندما ينخفض سطح الماء فيه بسرعة ثابتة.

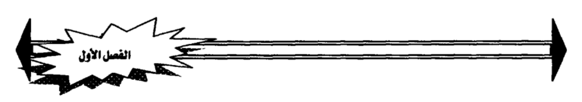
٢٧. جيء للملك تراتسلفانيا وملكتها بفناجين من القهوة الساخنة ومعها الحليب البارد. اما الملك فوضع في فنجانه ملعقة من الحليب فوراً وانتظر. واما الملكة فانتظرت عشر دقائق ثم أضافت الحليب (على درجة الحرارة نفسها) الى فنجانها، ثم شربا معاً. أي الفنجانين يكون أسخن، {إرشاد: استخدم قانون نيوتن في التبريد، وافرض ان درجة حرارة الحليب أقل من درجة حرارة الهواء}.

(١-٢) طرق التعويض

نقدم في هذا البند ثلاثة أشكال من التعويض تفيد أحياناً في حل معادلات تفاضلية.

(*) ايفانجلستا توريشللي (١٦٠٨ – ١٦٤٧) كان فيزيائيا ايطاليا.





لنفرض أن لدينا معادلة تفاضلية من الرتبة الألى، بالصيغة.

$$\frac{دص}{دس} = ق\left(\frac{ص}{س}\right)؛ \quad \text{(١-٢١)}$$

أي أن طرفها الأيسر دالة للمتغير ص/س فمن الطبيعي أن نجرب تعويض ع = ص/س. ولأن ص يعتمد على س، فكذلك ع. فإذا فاضلنا ص= س ع بالنسبة إلى س ينتج:

$$\frac{دص}{دس} = ع + س\,\frac{دع}{دس} \quad \text{(١-٢٢)}$$

ونعوض ع = ص/س ونستعيض عن الطرف الأيمن في (١-٢١) بالطرف الايسر في (١-٢٢) فينتج:

$$ع + س\,\frac{دع}{دس} = ق\,(ع).$$

ويمكن فصل المتغيرين في هذه المعادلة، لأن:

$$س\,\frac{دع}{دس} = ق\,(ع) - ع.$$

فيكون

$$\frac{دع}{ق(ع) - ع} = \frac{دس}{س}$$

ويمكن الآن الحصول على الحل كاملاً بمكاملة طرفي المعادلة ثم نستعيض عن ع بقيمتها ص/س والمثال التالي يوضح هذه الطريقة:

المثال (١)

$\frac{دص}{دس} = \frac{س - ص}{س + ص}$ بقسمة البسط والمقام في الطرف الأيسر على س ينتج:

$\frac{دص}{دس} = \frac{١ - (ص/س)}{١ + (ص/س)} = \frac{١ - ع}{١ + ع} =$ ق (ع).

فنستعيض عن الطرف الأيمن بالعبارة ع + س (د ع/ د س)، ونفصل المتغيرين، فينتج بعد التعديل الجبري:

$\left(\frac{١ + ع}{١ - ٢ع - ع^٢}\right) دع = \frac{دس}{س}.$

وبعد التكامل ينتج:

لي $(١ - ٢ ع - ع^٢) = -٢$ لي س + ح = لي ح $س^{-٢}$، فنرفع ونعوض عن ع بقيمتها ص/ س فينتج الاقتران الضمني.

$١ - \frac{٢ص}{س} - \frac{ص^٢}{س^٢} = \frac{ح}{س^٢}$

فنضرب في $س^٢$ وينتج $س^٢ - ٢$ س ص $- ص^٢ =$ ح

وهناك تعويض آخر يفيد المعادلات التي من النوع

$\frac{دص}{دس} =$ ق (أس + ب ص + جـ)..........................(١-٢٣)

حيث أ، ب، جـ أي ثوابت حقيقية، فإذا عوضنا ع = أ س + ب ص+ جـ في المعادلة (١-٢٣)، ينتج

$\frac{عَ - أ}{ب} =$ ق (ع).

لأن عَ = أ + ب صَ والمتغيران في هذه المعادلة قابلان للفصل

المثال (٢):

$\frac{دص}{دس} = (س+ص+١)^{-٢}$ نضع ع = س + ص + ١، فيكون عَ = ١ + صَ،

أي أن عَ- ١ = $ع^{٢}$ - ٢ فيكون عَ = $ع^{٢}$ - ١، وهذا يمكن أن يكتب بالصيغة:

$$دس = \frac{د ع}{ع^{٢}-١} = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{ع-١} - \frac{١}{ع+١}\right) دع$$

نكامل فنجد أن لي { (ع – ١) / (ع + ١) } = ٢س + جـ فيكون (ع – ١) / (دع+ ١) = حـ $هـ^{٢س}$

ومن هذا ينتج بعد التعديل الجبري:

$$س+ص+١ = ع = \frac{١+حهـ^{٢}س}{١-حهـ^{٢}س}$$

وهناك تعويض ثالث يغير في المعادلات التي من النوع:

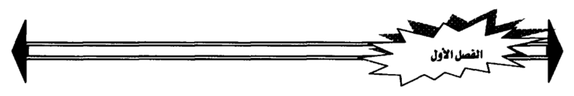
$$\frac{دس}{دص} = ق\left(\frac{ﻡس+ب ص+ج}{\alpha+\mathbf{B}ص+ع}\right)، ﻡ \mathbf{B} \neq \alpha ب..............(١-٢٤)$$

ويلاحظ أنه إذا كان ج، لا صفراً كان بالإمكان أن يكتب الطرف الأيسر من (١- ٢٤) بالشكل

$$ق\left(\frac{ﻡس+ب ص}{\alpha س+\mathbf{B}ص}\right) = ق\left(\frac{ﻡ+ب(ص/س)}{\alpha\mathbf{B}(ص/س)}\right) = ك\left(\frac{ص}{س}\right)،$$

وهذا دالة للتغير ص/ س، ولذا يمكن أن تحل المعادلة بالطريقة التي بها





حللنا المعادلة (١-٢١) فلنصنع س = ك + هـ، ص = ل + و، ولنختر هـ وبحيث يكون الطرف الأيسر في (١-٢٤) مساوياً

ق$\left(\frac{أك+ب ل}{\alpha ك+\mathbf{B} ل}\right)$ وهذا الاختيار ممكن دائماً، وهناك اختيار وحيد يفي بالمطلوب، وذلك بحل المعادلتين الآيتين:

أهـ + ب و = - جـ

αهـ + B و = - γ،

لإيجاد هـ و ولأن محددة أ B - αب ≠ ٠، والآن

$\frac{دص}{دس}=\frac{د(ل+و)}{دك}\bullet\frac{دك}{دس}=\frac{دل}{دك}$ ، فتعبر المعادلة (١-٢٤):

$\frac{دص}{دس}=ق\left(\frac{أك+ب ل}{\alpha+ك\mathbf{B} ل}\right)=ق\left(\frac{أ+ب(ل/ك)}{\alpha+\mathbf{B}(ل/ك)}\right)$ وهذه المعادلة تنطبق عليها الطريقة الأولى

المثال (٣):

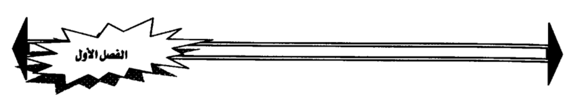
$\frac{دص}{دس}=\frac{س-ص-٥}{س+ص-١}$، نحل المعادلتين هـ - و = ٥، هـ + و =١

فيكون هـ = ٣، و= - ٢ فيكون التعويض: س = ك + ٣، ص = ل - ٢، ويكون:

$\frac{دل}{دك}=\frac{ك-ل}{ك+و}$ وقد رأينا من المثال (١) أن حل هذه المعادلة هو:

ك^{٢} - ٢ ك ل - ل^{٢} = حـ. فحل المعادلة الأصلية هو:





$$(س - ٣)^٢ - ٢ (س - ٣) (ص + ٢)^٢ = حـ$$

في المعادلة (١-٢٤)، إذا كان ﻡ B = α ب، نضع ع = ﻡس + ب ص، فيكون $\frac{B}{ب}ﻡ = \alpha$

$$\frac{B}{ب}ع = \frac{ﻡB}{ب}س + Bص = \alpha س + Bص$$

فنعوض عن ﻡ س + ب ص، α س+ B في (١-٢٤) بالعبارتين ع، $\frac{B}{ب}$ع على الترتيب، فيصبح $\frac{دع}{دس} = ب ق\left(\frac{ع+ج}{(B/ب)ع + Y}\right) + ﻡ$، لان عَ = ﻡ+ ب صَ ومتغيراً هذه المعادلة يمكن فصلها

المثال (٤):

$\frac{دص}{دس} = \frac{س+ص+١}{٢س+٢ص-١}$ نأخذ ع = س + ص، فيكون عَ = ١صَ ثم بعد المعالجة الجبرية ينتج: $\frac{دع}{دس} = \frac{٣ع}{٢ع-١}$

فبعد فصل المتغيرين ينتج ٢ ع - لي ع = ٣ س + جـ، أي أن س + ص= جـ سا (٢ص - س) والجدول التالي يحمل نتائج هذا البند:

شكل المعادلة	التعويض	المعادلة الجديدة
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)$	$\text{ع} \; \frac{\text{ص}}{\text{س}}$	$\frac{\text{دع}}{\text{ق(ع)} - \text{ع}} = \frac{\text{دس}}{\text{س}}$
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}(\text{أس} + \text{بص} + \text{ح})$	$\text{ع} = \text{أس} + \text{بص} + \text{ج}$	$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{ب ق(ع)} + \text{أ}$
$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ق}\left(\frac{\text{أس} + \text{ب ص} + \text{ج}}{\alpha\text{س} + B\text{ص} + Y}\right)$		
$\text{ب}\,\alpha = Bhj$ $\text{ب}\,\alpha \neq Bhj$	$\text{ع} = \text{أ س} + \text{ب ص}$ $\text{س} = \text{ك} + \text{هـ}$ (*) $\text{ص} = \text{ل} + \text{و}$	$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \text{بق}\left(\frac{\text{ع} + \text{ح}}{(\text{ب}/B)\text{ع} + \gamma}\right) + \text{أ}$ $\frac{\text{دل}}{\text{دك}} = \text{ق}\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}(\text{ل}/\text{ك})}{\alpha + B(\text{ل}/\text{ك})}\right)$

التمارين (١-٢):

في التمارين ١ الى ١٢ أوجد الحل العام لكل معادلة إذا أمكن، وإلا فأوجد علاقة يعرِّف بها الحل ضمنياً فإذا أعطي شرط إبتدائي فأوجد الحل الخاص الذي يحققه.

١. $\text{س د ص} - \text{ص د س} = \sqrt{\text{س ص}}\;\text{س ص د س}$

٢. $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{\text{س}}{\text{ن}} + \text{جتا}\frac{\text{س}}{\text{ن}}$

٣. $(\text{س هـ}^{\text{ص/س}} + \text{ص})\,\text{د س} = \text{س د ص}$، $\text{ص}(١) = ٠$

٤. $(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})^{٢}$ ٢ س ص د ص، $\text{ص}(-١) = ٠$

٥. $\frac{\text{ن د س}}{\text{دن}} + \text{س} = ٢\sqrt{\text{س ن}}$



٦. (س + ع) د س = س د ع

٧. (ص^{٢} − ٢ س ص) د س + (٢ س ص − س^{٢}) د ص =.،ص (١) = ٢

٨. (س^{٢} + ص^{٢}) د س + ٣ س ص د ص = ٠

٩. $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}$ س^{٢} + ص^{٢} د س = س د ص − ص د س

١٠. (س^{٢} ص + د س ص^{٢} − ص^{٣}) د س− (٢ ص^{٣} − س ص^{٢} + س^{٣}) د ص=٠

١١. صَ= $\frac{\text{ص}^{٢}+\text{س ص}}{\text{س}^{٢}}$، ص (١) = ١

١٢. سَ = $\frac{\text{س} - \text{ن ص}^{-٢}(\text{س}/\text{ن})}{\text{ن}}$، س (١) = π/ ٤

١٣. حل المعادلات التالية:

أ) ٢ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س^{٢} + ٤ س ص + ٤ ص^{٢} + ٣

ب) (س + ص− ١)^{٢} د س + ٩ د ص= ٠

جـ) (س + ص) د ص = (٢ س + ٢ ص− ٣) د س

١٤. استعمل نتائج هذا البند في حل ما يلي:

أ). (س + ٢ ص + ٢) د س + (٢ س − ص) د س = ٠

ب) (− ص + ١) د س + (س + ص) دص =٠

جـ) (س + ص + ٤) د س = (٢س + ٢ص − ١) د ص،ص د ٠) =٠

١٥. حل المعادلة

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١ - س ص^{٢}}{٢ س^{٢} ص}$ ، بتعويض ع = ص/ س^{ن} واختيار قيمة مناسبة للرمز ن.

١٦. استعمل طريقة التمرين ١٥ في حل:

$$\frac{د س}{د ن} = \frac{س - ن س^{٢}}{ن + س ن^{٢}}$$

(١-٣) المعادلة الخطية.

تعد المعادلة ذات الرتبة ن خطية إذا أمكن أن تكتب بالصيغة:

$$\frac{د^{ن} ص}{د س^{ن}} + أ_{ن-١}(س) \frac{د^{ن-١} ص}{د س^{ن-١}} + \cdots + أ_{١}(س) \frac{د ص}{د س} + أ_{.}(س) ص = ق(س)$$

فمعادلة الرتبة الأولى الخطية صيغتها: $\frac{د ص}{د س} + أ (س) ص = ق(س)$

ومعادلة الرتبة الثانية الخطية صيغتها:

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} + أ (س) \frac{د ص}{د س} + ب(س) ص = ق (س)$$

وفي هذا كله تشير أ(س)، ب (س)، ق (س) الى اقترانات في س فقط

وقبل البدء بمعالجة معادلة الرتبة الأولى الخطية العامة:

$\frac{د ص}{د س} + أ (س) ص = ق (س)$ ،.............................(١-٢٥)

نوضح بعض الحالات الخاصة إذا كان ق (س) = ٠، وكان ﻡ (س) = ﻡ (عدداً ثابتاً)، تصبح المعادلة (١-٢٥):

$$\frac{د\,ص}{د\,س} + ﻡ\,ص = ٠ \quad ....(١-٢٦)$$

فبفصل المتغيرين ينتج $\frac{د\,ص}{ص} = -ﻡ\,د\,س$ وبالتكامل ينتج لي:

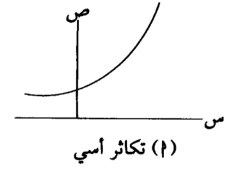
لو ص= -ﻡ س + جـ أي أن:

$$ص = جـ\,هـ^{-ﻡ\,س} \quad .... (١ – ٢٧)$$

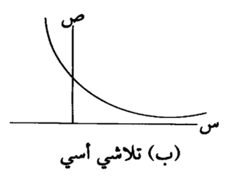
فإذا كانت ﻡ موجبة كانت المعادلة (١-٢٧) معادلة التلاشي الأسي exponential decay

وإذا كانت ﻡ سالبة فالمعادلة (١-٢٧) هي معادلة التزايد الأسي growth exponential

كما يبينه الشكل (١- ٢) (أ)، (ب)

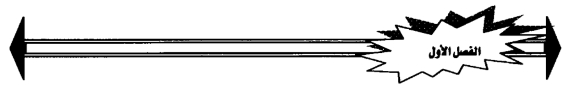


(ﻡ) تكاثر أسي



(ب) تلاشي أسي

الشكل (١-٢)



المثال (١):

بيئة تزايد عدداً بمعدل ١٠٪ في وحدة الزمن، وقد كان عددها في البدء ١٠٠٠، فإذا كان عددها ع (ن) في اللحظة ن، بمعادلة تزايدها هي

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \text{١و٠ ع} \quad \text{أي} \quad \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} - \text{١و٠ ع} = \text{٠}$$

وهذه هي المعادلة (١- ٢٦) وفيها أ = -١ و.، وحلها العام ع (ن) = جـ هـ$^{\text{١و.ن}}$

نضع ن =. فينتج ع (٠) = ١٠٠٠ = ج. فحل المسألة إذن هو ع (ن) = ١٠٠٠ هـ$^{\text{١و.ن}}$

فمثلاً إذا كانت وحدة الزمن الأسبوع، فالعدد بعد ١٠ أسابيع هو ع (١٠) = ١٠٠٠ هـ ≈ ٢٧١٨.

لنبحث الآن في مسألة أعم هي:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{أ ص} = \text{ق (س)} \qquad \text{(١-٢٨)}$$

يستحيل هذا فصل المتغيرين ولكن هناك طريقة سهلة لحل (١- ٢٨)، وذلك بضرب طرفي المعادلة بعامل تكامل integrating Rector

فلأن:

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{هـ}^{\text{أس}}\text{ص}\right) = \text{هـ}^{\text{أس}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{أص}\right)$$ ، يمكن ضرب طرفي (١-٢٨) في هـ$^{\text{أس}}$ فينتج:



$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{هـ}^{\text{اس}}\text{ص}\right)=\text{هـ}^{\text{اس}}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}+\text{اص}\right)=\text{هـ}^{\text{اس}}\ \text{ق (س)} \quad \text{......... (١-٢٩)}$$

نكامل الطرفين من (١- ٢٩) فينتج:

$$\text{هـ}^{\text{اس}}\ \text{ص} = \int \text{هـ}^{\text{اس}}\ \text{ق (س) د س + جـ} \quad \text{...................... (١- ٣٠)}$$

أي أن

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{اس}}\ \text{ص} \int \text{ق (س) هـ}^{\text{اس}}\ \text{د س + جـ} \ ] \quad \text{................(١- ٣٠)}$$

$$\text{ص} = \text{هـ}^{-\text{اس}} \left\{ \int \text{ق (س) هـ}^{\text{اس}}\ \text{د س + جـ} \right\} \quad \text{................ (١- ٣١)}$$

المثال (٢):

خذ المعادلة د ص/ د س + ٢ص = س. عامل التكامل هنا $\text{هـ}^{\text{٢س}}$

فحسب المعادلة (١-٣٠) نجد:

$$\text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{ص} = \int \text{س هـ}^{\text{٢س}}\ \text{ق (س) د س + جـ} \quad \text{................... (١-٣٢)}$$

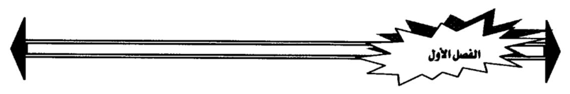
نكامل الطرف الأيسر من (١- ٣٢) بالأجزاء فينتج:

$$\text{هـ}^{\text{٢س}}\ \text{ص} = \frac{\text{سهـ}^{\text{٢س}}}{٢} - \frac{١}{٢}\int \text{هـ}^{\text{٢س}}\text{د س + ج}$$

$$\text{فيكون ص} = \text{هـ}^{\text{٢س}} \left[\frac{١}{٢}\text{سهـ}^{\text{٢س}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{جـ} \right]$$

أي أن:

$$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{٢س}} \left[\frac{١}{٢}\text{سهـ}^{\text{٢س}} - \frac{١}{٤}\text{هـ}^{\text{٢س}} \right. + \text{جـ هـ}^{-\text{٢س}}$$



نعود الآن الى المعادلة (١-٢٥)، ذات الرتبة الأولى، الخطية، العامة، فلأن التفاضل والتكامل عمليتان متعاكستان، يكون

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\int \text{م}(\text{س})\,\text{د س}\ \text{م}(\text{س})$$

ولأن $$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{هـ}^{\text{ل}(\text{س})}\,\text{ص}\right)=\text{هـ}^{\text{ل}(\text{س})}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}+\text{ص}\frac{\text{د ل}}{\text{د س}}\right)$$

فإن $$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{هـ}^{\int \text{م}(\text{س})\,\text{دس}}\,\text{ص}\right)=\text{هـ}^{\int \text{م}(\text{س})\,\text{دس}}\left[\frac{\text{د ص}}{\text{دس}}+\text{م}(\text{س})\,\text{ص}\right]$$ ،

يتضح أن $\text{هـ}^{\int \text{م}(\text{س})\,\text{د س}}$ عامل تكامل مناسب للمعادلة (١-٢٥) نضرب طرفي (١-٢٥) بهذا العامل، فنجد أن:

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{هـ}^{\int \text{م}(\text{س})\,\text{دس}}\,\text{ص}\right)=\text{هـ}^{\int \text{م}(\text{س})\,\text{دس}}\left[\frac{\text{د ص}}{\text{دس}}+\text{م}(\text{س،ص})\right]$$

$$=\text{هـ}^{\int \text{م}(\text{س})\,\text{د س}}\left\{\int \text{ق}\ \text{هـ}^{\int \text{م}(\text{س})\,\text{د س}}\,\text{دس}+\text{جـ}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (١- ٣٤)$$

والمعادلة (١- ٣٤) تؤيد ما ذكرناه في مطلع هذا الفصل، من مقدرتنا على حل معادلة الرتبة الأولى، (١-٢٥) تعتمد كلياً على مقدرتنا على أجراء التكاملات في (١-٣٤).

المثال (٣): حُل

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}+\frac{٢}{\text{س}}\,\text{ص}=٥\text{س}^{٢}$$

نلاحظ أن المعادلة (١-٣٥) تشابه شكل المعادلة (١-٢٥) لكن $\text{م}(\text{س})=\frac{٢}{\text{س}}$،





فيكون $\int$ م (س) د س = ٢ $\int \frac{دس}{س}$ = ٢ لي س = س ٢

فبضرب طرفي المعادلة في سا (لي س٢) = س٢ لا والتكامل حسب (١-٣٣)، ينتج:

س٢ ص= $\int$ ٥ س٢. س٢ د س + جـ = س٥ + جـ

فيكون ص = س٣ + جـ س-٢ هو الحل العام للمعادلة (١- ٣٥).

المثال (٤):

انظر في المعادلة د ص/ د س = س٣-٢س ص، حيث ص = ١، عندما س = ١ تكتب المعادلة بشكل د ص/ د س + ٢س ص = س٣ فيتبين ان م (س)= ٢ س وان عامل التكامل هو

سا س {$\int$ أ د ن) دن } = سا س٢، فنضرب الطرفين في سا (س٢) ونكامل، فينتج:

هـ^س٢ ص = $\int$س٣ هـ^س٢ د س، ويكون ص= هـ^-س٢ { $\int$ س٣ هـ^س٢ د س + جـ }.

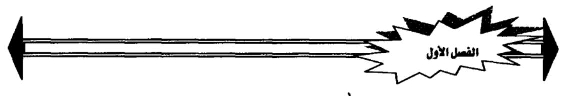
ويمكن ايجاد التكامل بالاجزاء كما يلي:

$$د س = \frac{س^٢ هـ^{س^٢}}{٢} - \int س هـ^{ص^٢} دس = هـ^{س^٢} \left(\frac{س^٢ - ١}{٢}\right)$$ فنعوض هذا بدل التكاملة

فينتج:

$$ص = هـ^{س^٢} \left[هـ^{س^٢} \left(\frac{س^٢ - ١}{٢}\right) + ج \right] = \frac{١}{٢}(س^٢ - ١) ج هـ^{-س^٢}$$ نعوض س=١ فينتج:





$1 =$ ص (١) = جـ هـ$^{-1}$، أي ان جـ = هـ فيكون حل المسألة

$$ص = \frac{1}{2}(س^{2} - 1) + هـ^{1 - س^{2}}$$

المثال (٥) = التغذية في الوريد بالجلوكوز: ان حقن الجلوكوز في مجرى الدم تقنية طبية هامة. فلدراسة هذه العملية لنجعل ج (ن) ترمز الى كمية الجلوكوز في مجرى الدم لمريض في اللحظة ن. ولنفرض ان الجلوكوز يحقن في مجرى الدم بسرعة ثابتة هي ك غرامات في الدقيقة. وفي الوقت ذاته يجري تحول الجلوكوز وخروجه من مجرى الدم بسرعة تتناسب مع كميته في الدم. فالاقتران ج (ن) يحقق العلاقة:

$$\frac{دج}{دن} = ك - \text{م}ج$$

حيث م ثابت موجب فلحل هذه المعادلة نكتبها د ج/ دن+ م ج = ك، ثم نضرب الطرفين بعامل التكامل هـ$^{\text{م}ن}$.

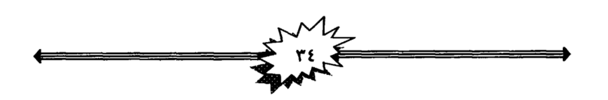
فالحل هو ج (ن) = حـ هـ$^{-\text{م}ن}$ + ك/ م، وعند ن = ٠ يكون

حـ = ج (٠) – ك/ م .

فيكتب الحل اذن بالصيغة:

$$ج(ن) = \frac{ك}{\text{م}} + \left(ج(٠) - \frac{ك}{\text{م}}\right)هـ^{-\text{م}ن}$$

فعندما ن ← ∞، فان تركيز الجلوكوز يقارب القيمة التي يستقر عليها وهي ك/ م.



التمارين (١-٣):

في التمارين ١ الى ١١ أوجد الحل العام لكل معادلة. فاذا أعطيت شرطا ابتدائيا، فأوجد الحل الخاص الذي يحققه:

١. $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٣\text{س}$

٢. $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢٢\text{ص} = ٠ \text{،} \text{ص}(١) = ٢$

٣. $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \text{س} + ١ \text{،} \text{س}(٠) = ١$

٤. $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} = \text{جا س} \text{،} \text{ص}(٠) = ٠$

٥. $\frac{\text{دس}}{\text{دص}} - \text{س لي ص} = \text{ص}^{\text{ص}}$

٦. $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} = ١\left(١ + \text{هـ}^{٢\text{ص}}\right)$

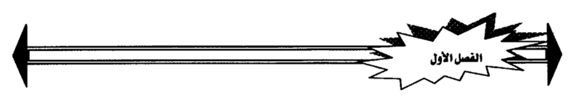
٧. $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \frac{٣\text{ص}}{\text{س}} = \text{س}^{٣} \text{،} \text{ص}(١) = ٤$

٨. $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + \text{س ظتا ن} = ٢\text{ن قتا ن}$

٩. $\text{س}^{-} - ٢\text{س} = \text{ن}^{٢}\text{هـ}^{٢\text{ن}}$

١٠. $\text{ص}' + \frac{٢\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{جتاس}}{\text{س}^{٢}} \text{،} \text{ص}(\Pi) = ٠$

١١. $\frac{\text{دس}}{\text{دي}} + \text{س} = \text{ي هـ}^{-\text{ي}} + ١$



١٢. حل المعادلة. ص − س $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ $\text{ص}^{٢}\text{هـ}^{\text{ص}}$ بتبديل وظيفتي س، ص (أي اعتبار س هو التابع).

١٣. استعمل طريقة التمرين ١٢ في حل $\frac{\text{د ص}}{\text{س}} = ١ / (\text{هـ}^{-\text{ص}} - \text{س})$.

١٤. أوجد حل المعادلة دص/ دس = ٢ (٢ س − ص) الذي يمر قـي النقطـة (٠، -١)

١٥. لنفرض أن ح (د ن) هو الفرق في درجة الحرارة في اللحظة ن بين جسم ما والوسط الذي يحيط به فحسب قانون نيوتن في التبريد د ح/ د ن = - ك ح، حيث ك > ٠، فاحسب بدلالة ك الوقت اللازم حتى ينخفض الفـرق بين درجتي الحرارة:

أ) الى نصف قيمته الابتداية.

ب) الى ربع قيمته الابتدائية.

١٦. في تفاعل كيماوي تنتج الماده الكيماوية ك بسرعة، مـولات في الدقيقـة، وتستهلك في الوقت نفسه بسرعة جـ مولات في الدقيقة لكل مول مـن ك. وليكن (ن) هو عدد المولات المتوفرة من هذه المادة في اللحظة ن:

أ) أوجد معادلة تفاضلية تعبر عن قيمة ك (ن)

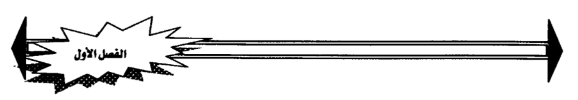
ب) أوجد ك (ن) بدلالة ك (٠).

جـ) أوجد كمية هذه المادة عندما تصل حالة الاستقرار.

١٧. انتشر مرض سار في مجتمع كـثير السكان، فـصارت نـسبة المـصابين بـه تتزايد مع الزمن. فاذا كانت:

ع (ن) هي نسبة المصابين بعد ن سنوات، وكان





$ع'(ن) = \{١ - ع(ن)\} / ٣$، $ع(٠) = ٠$، فبعد كم سنة تصبح نسبة المصابين ٩٠ في المئة؟

(١-٤) معادلات خاصة لا خطية:

يمكن ان تحول بعض المعادلات غير الخطية ذات الرتبة الاولى الى معادلات خطية باجراء تغيير مناسب على المتغيرات: فالمعادلة من هذا النوع، وتسمى بمعادلة برنولي

$$\frac{د ص}{د س} + ٲ(س)\, ص = ق(س)،\, ص^{ن} \qquad (١-٣٦)$$

ضع $ع = ص^{١-ن}$، فيكون $ع' = (١-ن)\, ص^{-ن}$. فاذا اضربنا طرفي (١ - ٣٦) في $(١ - ن)\, ص^{-ن}$، فينتج $(١ - ن)\, ص^{-ن}\, ص' + (١ - ن)\, ٲ\, ص^{١-ن}$ $= (١ - ن)\, ق$.

أي ان:

$\frac{دع}{دس} + (١-ن)\, ٲ(س)\, ع = (١-ن)\, ق(س)$. وهذه معادلة خطية يمكن أن تحل كما تقدم.

المثال (١):

$$\frac{د ص}{د س} - \frac{ص}{س} = \frac{-٥}{٢} س^{٢} ص^{٣} \qquad (١-٣٧)$$

هنا: ن = ٣، فليكن $ع = ص^{-٢}$، $ع' = -٢\, ص^{-٣}\, ص'$، فنضرب المعادلة (١- ٣٧) في $-٢\, ص^{-٣}$ ينتج





$$عَ + \frac{٢}{س}ع = ٥ س^{٢}$$

وقد رأينا من المثال (٣) من البند (١-٣) السابق، أن لهذه المعادلة حلا هو

$$ص^{-٢} = ع = س^{٣} + جـ س^{-٢}$$

فيكون $ص = (س^{٣} + جـ س^{-٢})^{-١/٢}$

ونتبع مثل هذا الاجراء في المثال التالي:

المثال (٢): حل

$$\frac{د ص}{د س} + ٲ(س) ص = ق (س) ص لي ص ....(١-٣٨)$$

نجعل ع = لي ص. فيكون $عَ = \frac{صَ}{ص}$، فإذا قسمنا (١- ٣٨) على ص تنتج المعادلة الخطية

عَ+ ٲ (س) + قَ (س) ع والمعادلة

$$\frac{د ص}{د س} + ص^{٢} + ٲ (س) ص + ب (س) = ٠ ....(١-٣٩)$$

لاخطية، وتسمى معادلة ركاتي (Riccati)، وهي ترد كثيراً في التطبيقات الفيزيائية، ويمكن أن تحل بتعويض بسيط يحولها الى معادلة خطية: ليكن ص= عَ/ع فيكون عَ = ع ص، عً = عَ ص + ع صَ

ولكن باستعمال التعويض الأصلي نجد أن:

$$ص عَ = \frac{(عَ)^{٢}}{ع} = ع \frac{(عَ)^{٢}}{ع} = ع ص^{٢}$$

إذن $عً = ع (صَ + ص^{٢})$



يتضح الآن أن ضرب المعادلة (١-٣٩) في ع قد ينتج نتائج شائقة:

عً + أ (س) عَ + ب (س) ع = ع ص^{٢} + أع ص + ب ع =.

فبهذا التعويض حولنا معادلة راكتي الى معادلة خطية من الرتبة الثانية هـي

عً+ أ(س) عَ + ب(س)ع=٠

وهذه سنحلها في ما بعد في الحالة الخاصة عندما يكـون أ (س)، ب (س) ثابتين

ومن معادلات المرتبة الأولى البالغـة الأهميـة معادلـة كلـيروه (clairaut) وهي:

صَ = صَ + ق (صَ).. (١-٤٠)

نفاضل الطرفين بالنسبة الى س فينتج:

صَ = صَ + س صً + قَ (صَ) صً،

وقد حصلنا على الحد الأخير بطريقة السلسلة، نحـذف الحـدود المتـشابهة فيبقى:

{ س + قَ (صَ) } صً = ٠ .... (١-٤١)

ولأن أحد العاملين يجب أن يكون صفراً، فهناك حالتان:

أ. إذا كان صً =٠، يكون صَ = جـ فنعوض هذا في المعادلة (١-٤٠) وينتج الحل العام

ص = جـ س + ق (ص)، .... (١-٤٢)



وهذا مجموعة خطوط مستقيمة.

ب. وإذا كان س+ قَ (صَ) = ٠، يكون س = - قَ (صَ)، وعندها يمكن أن نكتب المعادلة (١-٤٠)

بالصيغة:

ص= ق (صَ) – صَ قَ (صَ)................................ (١-٤٣)

هنا نجد أن كلاً من س، ص قد عّبر عنه بدلالة صَ. فلنجعل ص = ن، وبهذا نحصل على المعادلتين الوسيطتين:

س = - قَ (ن)، ص = ق (ن) – ن قَ (ن)..................(١-٤٤)

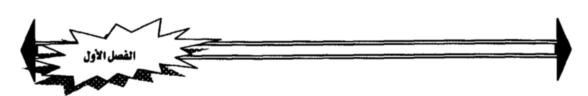
ويجب ان نتحقق من أن نقاط هذا المنحنى تحقق المعادلة (١-٤٠) فلأن

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{د\,ص / د\,ن}{د\,س / د\,ن} = \frac{قَ(ن) - ن\,قً(ن)}{- قً(ن)} = ن،$$

فإن ميل المنحنى عند أي نقطة يساوي الوسيط ن، شريطة أن يكون قً (ن) ≠. نعوض بدل صَ، - قَ (ن) بدل س في (١-٤٤) فتنتج المعادلة (١-٤٤) شريطة أن ق (ف) ≠. والمعادلة (١-٤٤) ليست حالة خاصة من الحل العام (١-٤٢)، لأن صَ في الحل العام ثابت، في حين أنه في (١-٤٤) يعتمد على الوسيط ن. والحل الخاص (١-٤٤) يسمى حلا منفرداً (singula) للمعادلة (١-٤٠)

المثال (٣): حل

ص = س صَ +(صَ)^{٣} .... (١-٤٥)



حسب (١-٤٢) ك إن الحل العام هـو ص ص = د س + ق (س) = جـ س + س^{٣}. ولأن ق (ن) = ن^{٣}

فالمعادلات الوسيطية للحل المنفرد هي:

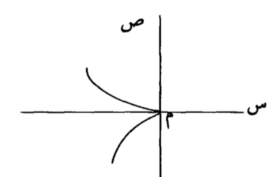
س = -٣ ن^{٢}، ص = ن^{٣} – ن (٣ ن^{٢}) = -٢ ن^{٣}، ن ≠ ٠ .... (١-٤٦)

{ عند ن = ٠ يكون قَ (٠) = ٠} نحذف الوسيط ن فينتج

٤ س^{٣} = - ١٠٨ ن^{٦} = -٢٧ ص^{٢}، .... (١- ٤٧)

فإذن ٤ س^{٣} = -٢٧ ص^{٢} حل منفرد للمعادلة (١-٤٥)، الا عند النقطة (٠، ٠) حيث لا وجود للمشتقة صَ

انظر الشكل (١-٣) لاحظ أن الحل العام لا يشمل هذا الحل المنفرد

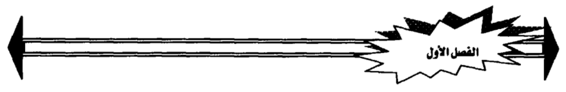


المثال (٤) خذ المعادلة:

س صَ – هـ$^{صَ}$ – ص = ٠

فنكتبها بالصيغة:

ص = س صَ - هـ$^{صَ}$..................................(١-٤٨)



فالحل العام هو $ص = حـ س - هـ^{حـ}$، والحل المنفرد

$س = هـ^{ن}$، $ص = هـ^{ن} (ن - ١)$

فيكون ن = لي س، وهذا معرف شريطة ان يكون $س > ٠$، فالحل المنفرد إذن:

$ص = س (لي س - ١)$، $س > ٠$

التمارين (١-٤)

١. حول المعادلات اللاخطية التالية الى معادلات خطية من الرتبة الثانية:

أ) $صَ + ص^{٢} - ١ = ٠$

ب) $\frac{د س}{د ن} + س^{٢} + ١ = ٠$

جـ) $صَ + ص^{٢} + ص - ١ = ٠$

٢. في المعادلة اللاخطية $صَ + أ ص^{٢} + ب ص + حـ = ٠$، أ، ب، حـ ثوابت اعتباطية. حول هذه المعادلة إلى معادلة خطية من الرتبة الثانية في التمارين ٣ الى ١١ أوجد الحل العام لكل معادلة وأوجد حلاً خاصاً علما أعطيت شرطاً ابتدائيا

٣. $\frac{د ص}{د س} = \frac{-(٦ص^{٢} - س - ١)ص}{٢ س}$

٤. $سَ = ١ + ٦ ن هـ^{ن-س}$

٥. $صَ = - ص^{٣} س هـ^{-٢س} + ص$

٦. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جا}^{2}\text{س} + \text{جتا}^{2}\text{ص}}{2\ \text{ظا س جا ص جتا ص}}$، $\text{ص}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

٧. $(2\,\text{ص}^{3} - \text{س}^{3})\ \text{د س} + 3\ \text{س ص}^{2}\ \text{د ص} = 0$، $\text{ص}(1) = 1$

٨. $\text{س}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{ص} = \text{س}^{4}\ \text{ص}^{3}$، $\text{ص}(1) = 1$

٩. $\text{ن س}^{2}\ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + \text{س}^{3} = \text{ن جتا ن}$

١٠. $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \frac{3}{\text{س}}\text{ص} = \text{س}^{2}\text{ص}^{2}$، $\text{ص}(1) = 2$

١١. $\text{س ص ص}' - \text{ص}^{2} + \text{س}^{2} = 0$

في التمارين ١٢ الى ١٨ أوجد الحل العام والحل المنفرد لكل معادلة

١٢. $\text{ص} = \text{س}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \frac{1}{4}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{4}$

١٣. $\text{ص} = \text{س}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - 4\right)^{2}$

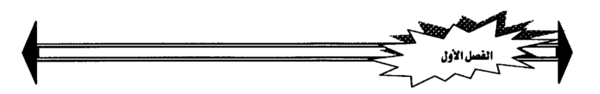
١٤. $\text{ص} = \text{س}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \text{هـ}^{\text{دص/دس}}$

١٥. $\text{ص} = \text{س}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{-1}$

١٦. $(\text{ص} - \text{س ص}')^{2} - (\text{ص}')^{2} = 1$

١٧. $\text{ص} = \text{س ص}' - b\ \text{ص}'$

١٨. $\text{ص} = \text{س ص}' + \text{ل ي ص}'$



(١-٥) المعادلات المحكمة Fxact Equatious

سنستعمل الآن المشتقات الجزئية لحل معادلات تفاضلية عادية.

لنفرض اننا اخذنا التفاضلية الكلية للمعادلة ج (س، ص) = ث، فنتج:

$$د ج = \frac{ءج}{ء س} د س + \frac{ءج}{ءص} د ص = ٠ \quad .... (١-٥٠)$$

فمثلاً المعادلة س ص = ث تعطي التفاضلية الكلية ص د س + س د ص = ٠، وهذه معادلة تفاضلية تكتب على النحو صَ = - ص/ س. والآن نعكس هذه الخطوات، فنبدأ من المعادلة التفاضلية:

$$م (س، ص) د س + ن (س، ص) د ص = ٠ \quad .... (١-٥١)$$

فهل نستطيع أن نجد اقتراناً ج (س، ص) بحيث يكون:

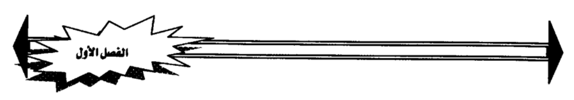
$$\frac{ءج}{ء س} = م، \quad \frac{ءج}{ءص} = ن$$

إذا تم ذلك لتصبح (١-٥١): د ج = ٠، ويكون ج (س، ص)= ث هو الحل العام للمعادلة (١-٥١) وفي هذه الحالة نقول أن م د س + ن د ص هي تفاضلة محكمة وأن (١-٥١) هي معادلة تفاضلية محكمة.

وكيف نعرف إذا كانت المعادلة التفاضلية محكمة؟ نذكر من دراستنا لاساسيات الحسبان:

إذا وجد الطرفان وكانا متصلين فبدلالة الاقترانين م، ن تصبح المعادلة (١- ٥٢) كما يلي:

$$\frac{ء^٢ج}{ءص ءس} = \frac{ء^٢ج}{ءس ءص} \quad .... (١-٥٢)$$



فالشرط (١-٥٣) هو الشرط اللازم لأن تكون (٢-٥١) محكمة وسنرى أن (١-٥٣) هو أيضاً كافٍ وذلك بأن نبين كيف نحصل على الاقتران ج الذي يحقق (١-٥١) والطريقة ذات خطوتين:

أولاً: أوجد تكامل الاقتران م = ءج/ءس بالنسبة الى س:

$$\int م\, د س = \int \frac{ءج}{ء س} دس = \hat{ج} + هـ (ص) \qquad (١-٥٤)$$

و"ثابت التكامل" هو (ص) في (١-٥٤) اقتران في ص لا على التعيين نفرضه لأننا نريد أن نضع أعم حد يتلاشى عند مفاضلته بالنسبة الى س. والمسألة الأن هي أن نكتشف فإذا يكون هذا الحد الذي سميناه هـ (ص)

ثانياً: نأخذ التفاضلة الجزئية للمعادلة (١-٥٤) بالنسبة الى ص:

$$\frac{ء}{ء ص} \int م\, د\, س = \frac{ءج}{ءص} + هَ[ص] = ن\, هَ(ص)$$

فيكون:

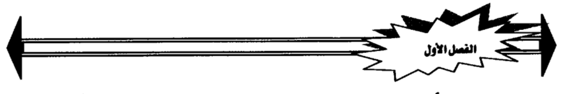
$$هَ(ص) = \frac{ء}{ص} \int م د\, س - ن\, .$$

فنفاضل داخل التكامل جزئياً ونعوض من ء م/ء ص بها يساويه ء ن/ءس فينتج:

هـَ (ص) =

$$\int \frac{ء\, م}{ء\, ص} د\, س - ن = \int \frac{ء\, ن}{ء\, س} د\, س - ن \qquad (١-٥٥)$$





فالطرف الأيمن من المعادلة (١-٥٥) اقتران في ص فقط، لأن مشتقته الجزئية بالنسبة الى س صفر فنكامل طرفي (١-٥٥) فينتج:

$$هـ (ص) = \int (\int \frac{\partial ن}{\partial س} د س - ن) د ص + ث.$$

فإذا عوضنا هذا في (١-٥٤) نحصل على الحل العام للمعادلة (١-٥١).

المثال (١):

(١ - جا س ظا ص) د س + (جتا س قا^{٢} ص) د ص = ٠. هنا م (س، ص) = ١ - جا س ظا ص، ن (س، ص) = جتا س قا^{٢}ص فيكون:

$$\frac{\partial م}{\partial ص} = - جا س قا^{٢} ص = \frac{\partial ن}{\partial س} ،$$

فالمعادلة محكمة فلأيجاد الحل نلاحظ أن (١-٥٤) تقتضي أن يكون:

ج (س، ص) = $\int$م د س- هـ (ص) = س+ جتا س ظا ص- هـ (ص).

فنجد المشتقة الجزئية بالنسبة الى ص، في الطرفين فينتج:

$$جتا قا^{٢} ص = ن = \frac{\partial ج}{\partial ص} = جتا س قا^{٢} ص - هـَ (ص).$$

فيكون هـَ (ص) = ٠، أي أن هـ (ص) ثابت والحل العام هو:

ج (س، ص) = س + جتا س ظا ص + ث = ٠

وينبغي أن نلاحظ المعادلات المحكمة نادرة جداً لأن الشرط (١-٥٣) يقتضي توازناً محكماً بين الاقترانين م، ن. فمثلاً

(٣س + ٢ص) دس + س د ص = ٠



ليست محكمة ولكن إذا ضربنا المعادلة في س، تصبح المعادلة الجديدة

(٣ س^{٢} + ٢ س ص) د س + س^{٢} د ص = ٠ وهذه محكمة.

فالسؤال الآن هو: إذا كانت

م (س، ص) د س + ن (س، ص) د ص = ٠ .... (١-٥٦)

غير محكمة فتحت أي الشروط يكون هنالك عامل تكامل μ(س، ص) بحيث تكون μ م (س، ص) د س + μ ن (س، ص) د ص = ٠ محكمة؟

الجواب: يتم ذلك كلما كانت (١-٥٦) لها حل عام:

ج (س، ص) = ث. ولكي ترى ذلك نجد د ص/ د س في المعادلة (١-٥٦)

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} = \frac{\partial ج/\partial س}{\partial ج/\partial ص}،$$

فمن ذلك ينتج أن:

$$\frac{\partial ج/\partial س}{م} = \frac{\partial ج/\partial ص}{ن}$$

فاجعل أياً من طرفي هذه المعادلة μ (س، ص) فيكون

$$\frac{\partial ج}{\partial س} = \mu م، \quad \frac{\partial ج}{\partial ص} = \mu ن، \quad \text{..........} (١-٥٧)$$

وللمعادلة (١-٥٦) عامل تكامل واحد على الاقل هو μ ولكن الحصول على عوامل التكامل هو على الغالب صعباً جداً. ولذلك طريقة تنجح أحياناً. فبما أن (١-٥٧) تدل على أن μ م د س + μ ن د ص = ٠ محكمة فمن (١-٥٣) ينتج أن:



$$\mu \frac{\partial م}{\partial ص} + م \frac{\partial \mu}{\partial ص} = \frac{\partial}{\partial ص}(\mu م) = \frac{\partial}{\partial س}(\mu ن) = \mu \frac{\partial ن}{\partial س} + ن \frac{\partial \mu}{\partial س}.$$

فيكون

$$\frac{1}{\mu}\left(ن\frac{\partial \mu}{\partial س} - م\frac{\partial \mu}{\partial ص}\right) = \frac{\partial م}{\partial ص} - \frac{\partial ن}{\partial س} \qquad \text{(1-58)}$$

فإذا كان عامل التكامل μ يعتمد على س فقط تصبح المعادلة (١-٥٨)

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial س} = \frac{\partial م/\partial ص - \partial ن/\partial س}{ن} = ك \qquad \text{(1-59)}$$

ولأن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يتكون من اقترانات في س فقط فإن ك تكون بدلالة س فقط، فإذا كان هذا صحيحاً امكن إيجاد μ لفصل المتغيرين في μ (س) = سا { ∫ك (س) د س}. ومثل هذا سينتج إذا كان μ اقتراناً في ص فقط فعندها يكون

$$ك = \frac{\partial م/\partial ص - \partial ن/\partial س}{-م}$$

هو أيضاً اقتران في ص وهنا يكون μ (ص) = سا { ∫ك (ص) د ص} هو عامل التكامل.

المثال (٢)

(٣ س^{٢} − ص^{٢}) د ص − ٢ س ص د س = ٠ في هذا المثال: م = −٢ س ص، ن = ٣ س^{٢} − ص^{٢} فيكون

$$\frac{\partial م}{\partial ص} = -٢س، \quad \frac{\partial ن}{\partial س} = ٦س$$

فإذن:

$$ك = \frac{ءم / ء ص - ء ن / ء س}{-م} = \frac{-٤}{ص}،$$

فيكون:

$$\mu = س\ [\int -\frac{٤}{ص} د ص] = سا - ٤ ل ي ص) = ص^{-٤}،$$

فيصير لدينا:

$$\left(\frac{٣س^{٢} - ص^{٢}}{ص^{٤}}\right) د ص - \frac{٢س}{ص^{٣}} د س = ٠،$$

وهذه محكمة فالحل العام هو:

$$ج = \int م\ د س + هـ (ص) = -\frac{س^{٢}}{ص^{٣}} + هـ (ص)؛$$

فتفاضل هذه المعادلة بالنسبة الى ص فينتج:

$$\frac{٣س^{٢} - ص^{٢}}{ص^{٤}} = ن = \frac{٣س^{٢}}{ص^{٤}} + هَ(ص) .$$

فيكون هـَ (ص) = - ص$^{-٢}$، فيكون ه (ص) = ص$^{-١}$ + ث، فينتج أن:

$$ج (س، ص) = \frac{-س^{٢}}{ص^{٣}} + \frac{١}{ص} + د = ٠،$$ أي أن د ص^{٣} + ص^{٢} - س^{٢} = ٠

التمارين (١-٥)

في التمارين من ١ الى ١١ بين أن كل معادلة تفاضلية محكمة و أوجد حلها



العام، ثم أوجد الحل الخاص حيثما تعطي قيمة ابتدائية.

١. ٢س ص د س + (س^{٢} + ١) د ص = ٠

٢. { س جتا (س+ ص) + جـا (س+ ص) د س + س صَ (س،ص) دص =٠، ص(١) = Π/ ٢-١.

٣. (٤ س^{٣}ص^{٣}+ $\frac{\text{١}}{\text{س}}$) د س + (ع س^{٤}- $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$) د ص = ٠، س (هـ) = ١

٤. [لي(لي ص) + $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$س ص^{٣}] د س + [$\frac{\text{لي س}}{\text{ص لي ص}}$ + س^{٢}ص^{٢}] د ص = ٠

٥. (س – ص جتا س) د س – جا س د ص = ٠ ، ص (Π/ ٢) = ١

٦. (جتا، س جتا ٢ ص) د س + (جا ٢ س جا ٢ ص) د ص = ٠

٧. (ص هـ$^{\text{س ص}}$ + ٤ ص^{٣}) د س + (س هـ$^{\text{س ص}}$ + ١٢ س ص^{٢} – ٢ص) د ص = ٠، ص (٠) = ٢

٨. (٣ س^{٢} لي س + س^{٢} – ص) د س – س د ص = ٠، ص (١) = ٥

٩. (٢ س + هـ$^{\text{ص}}$) د س + (س^{٢} + س هـ$^{\text{ص}}$) د ص = ٠

١٠. (س^{٢} + ص^{٢}) د س + ٢ س ص د ص = ٠، ص (١) = ١

١١. ($\frac{\text{١}}{\text{س}}$ - $\frac{\text{ص}}{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}$) د س + ($\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}$ - $\frac{\text{١}}{\text{ص}}$) د ص = ٠

في التمارين من ١٢ الى ١٦ أوجد عامل التكامل لكل معادلة تفاضلية ثم أوجد الحل العام

١٢. ص د س + (ص – س) د ص = ٠

١٣. (س^{٢} + ص^{٢} + س) د س + ص د ص = ٠

١٤. ٢ ص^{٢} د س + (٢ س + ٣ س ص) د ص = ٠

١٥. (س^{٢} + ص^{٢}) د س − س د ص = ٠

١٦. (س^{٢} + ص^{٢}) د س + (٣ س ص) د ص =٠

١٧. حل س ص د س + (س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٢) د ص =٠

١٨. إذا كان م = ص أ (س ص)، ن = س ب (س، ص) بين أن ١/ (س م − ص ن) هو عامل تكامل للمعادلة م د س + ن د ص = ٠

١٩. استعمل نتيجة التمرين ١٨ لحل المعادلة: ٢ س^{٢} ص^{٣} د س + س^{٣} ص^{٢} د ص = ٠

٢٠. حل (س^{٢} + ص^{٢} + ١) د س − (س ص + ص) د ص = ٠

{ إرشاد: جرب عامل تكامل من النوع μ(س، ص) = (س + ١)^{ن} }

(١-٦) معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الأولى

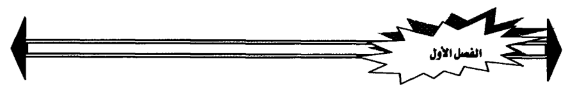
معادلة الفرق العامة الخطية ذات الرتبة الأولى هي

ص$_{ن+١}$ = أ$_{ن}$ ص$_{ن}$ + ف$_{ن}$ ،.............................. (١- ٦٠)

حيث أ$_{ن}$ ، ف$_{ن}$ معروفان مع جميع قيم ن. وقبل البدء بإيجاد القانون العام لحل المعادلة (١-٦٠) يهمنا أن نتفهم وجود المطابقة بين المعادلات التفاضلية الخطية ونظيرتها من معادلات الفروق فلننظر في معادلة أبسط هي:

ص$_{ن+١}$ = أص$_{ن}$، .... (١-٦١)





حيث أ ثابت معلوم لاحظ أننا بالاستقرار نجد أن $\text{ص}_{١} = \text{أ}\,\text{ص}_{٠}$، $\text{أ}\,\text{ص}_{١} = \text{أ}^{٢}\,\text{ص}_{٠}$ ،....، وبوجه عام $\text{ص}_{ن+١} = \text{أ}\,\text{ص}_{ن} = \text{أ}\,(\text{أ}\,\text{ص}_{ن-١})$ =..... $\text{أ}^{ن+١}\,\text{ص}_{٠}$ ،...... (١-٦٢)

وهذا هو الحل العام للمعادلة (١-٦١) فإذا قارنا (١-٦١)، (١-٦٢) مع المعادلة التفاضلية $\text{صَ} = \text{أ}\,\text{ص}$، وحلها العام $\text{ص}\,(\text{س}) = \text{جـ}\,\text{هـ}^{\text{أ}\,\text{س}}$ يتبين لنا أن ن + ١، أ، ص تناظر على التوالي س، $\text{هـ}^{\text{أ}}$، جـ. فلنفترض أن المعادلة كانت:

$$\text{ص}_{ن+١} = \text{أ}_{ن}\,\text{ص}_{ن}$$

فبالطريقة ذاتها نجد أن $\text{ص}_{١} = \text{أ}_{٠}\,\text{ص}_{٠}$، $\text{ص}_{٢} = \text{أ}_{١}\,\text{أ}_{٠}\,\text{ص}_{٠}$ ،........، وبوجه عام

$$\text{ص}_{ن+١} = \text{أ}_{ن}\,\text{أ}_{ن-١}\cdots\cdots\,\text{أ}_{١}\,\text{أ}_{٠}\,\text{ص}_{٠} = \left(\prod_{\text{ك}=٠}^{ن} \text{أ}_{\text{ك}}\right)\text{ص}_{٠} \quad ..\ (١\text{-}٦٤)$$

والمعادلة التفاضلية التي تناظرها هي $\text{صَ} = \text{أ}\,(\text{س})\,\text{ص}$، وحلها العام $\text{ص}\,(\text{س}) = \text{حـ}\,\text{هـ}^{\int \text{أ}(\text{س})\,\text{د}\,\text{س}}$، وإذن فإن $\prod_{\text{ك}=٠}^{ن} \text{أ}_{\text{ك}}$ يناظر $\text{هـ}^{\int \text{أ}(\text{س})\,\text{د}\,\text{س}}$.

ولننظر الآن في المعادلة:

$$\text{ص}_{ن+١} = \text{ص}_{ن} + \text{ف}_{ن} \quad ....\ (١ - ٦٥)$$

فطريقتنا الاستقرائية تفضي الى $\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٠} + \text{ف}_{٠}$، $\text{ص}_{٢} = \text{ص}_{١} + \text{ف}_{١} = \text{ص}_{٠} + \text{ف}_{٠} + \text{ف}_{١}$ ،....، ويكون $\text{ص}_{ن+١} = \text{ص}_{٠} + \sum_{\text{ك}=٠}^{ن} \text{ف}\,\text{ك}$..... (١-٦٦)

لأن $\text{صَ} = \text{ص} + \text{ف}\,(\text{س})$ حلها العام $\text{ص} = \text{جـ}\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}} \int \text{ف}\,(\text{س})$



هـ$^{-س}$ د س فقد اتضح التناظر (تذكر أن $\prod_{ك=٠}^{ن} = ١$ تناظر هـ´) وأخيراً، ننظر في المعادلة الخطية العامة، ذات الرتبة الأولى:

ص$_{ن+١}$ = ص$_{ن}$ + ف$_{ن}$ فبالاستقراء ينتج:

ص$_{١}$ = ﻫ$_{٠}$ ص$_{٠}$ + ف$_{٠}$، ص$_{٢}$ = ﻫ$_{١}$ ص$_{١}$ + ف$_{١}$ = ﻫ$_{١}$ ﻫ$_{٠}$ ص$_{٠}$ + ﻫ$_{١}$ ف$_{٠}$ + ف$_{١}$ ،............،

وبوجه عام: ص$_{ن+١}$ = ﻫ$_{ن}$ ﻫ$_{ن-١}$........ ﻫ$_{١}$ ﻫ) ص$_{٠}$ + (ﻫ$_{ن}$.... ﻫ$_{١}$) ف$_{٠}$ + (ﻫ$_{ن}$... ﻫ$_{٢}$) ف$_{١}$ + ... + ﻫ$_{ن}$ ف$_{ن-١}$ + ف$_{ن}$

= ($\prod_{ك=٠}^{ن}$ ﻫ$_{ك}$) ص$_{٠}$ + $\sum_{ك=٠}^{ن}$ ($\prod_{ي=ك+١}^{ن}$ ﻫ ي) ف ك............. (١-٦٧)

(ملاحظة: نعرف الضرب الخالي $\prod_{ي=ن+١}^{ن}$ ﻫي باعتباره مساوياً للواحد)

وينبغي مقارنة المعادلة (١-٦٧)

بالمعادلة (١- ٣٤) في البند (١- ٣) لأنها المقابل المتكامل لها.

المثال (١):

ص$_{ن+١}$ = (ن+ ١)، ف$_{ن}$ = ٠ فباستعمال المعادلة (١-٦٤) أو بطريقة الاستقراء نجد أن: ص$_{ن+١}$ = ($\prod_{ك=٠}^{ن}$ (ك + ١) ص$_{٠}$ = (ن + ١) ! ص$_{٠}$

المثال (٢):

مزرعة أميبا كانت سعتها الابتدائية ١٠٠٠، وقد لوحظ أن واحدة من كل عشر أميبات، في المتوسط، تنتج واحدة اخرى في كل ساعة، الانقسام الخلوي،



فكم أميبا بالتقريب سيكون في المزرعة بعد ٢٠ ساعة؟

ليكن ص ن = $\frac{١}{١٠}$ ص ن ،.................................... (١-٦٨)

وهـذا يعـني أن ص ن+١ = (١، ١) ص ن. والحـل العـام تعطيـه المعادلـة (١ – ٦٢)، هو:

ص ن+١ = (١، ١) $^{ن+١}$ ص ٠، ص ٠ = ١٠٠٠.

فيكون ص ٢٠ = (١، ١) ^{٢٠} × ١٠٠٠ ≈ ٦٧٢٧.

المثال (٣):

في المثال السابق، افرض ان ٣٠ اميبا أخـرى تتـسرب الى المزرعـة في كـل ساعة من وعاء مجاور لم يحكم اغلاقه، فكم يكون عدد الاميبا بعد ٢٠ ساعة؟

تصبح المعادلة

ص ن+١ – ص ن = $\frac{١}{١٠}$ص ن+٣٠ ، أي أن ص ن+١ =(١، ١)ص ن+٣٠

يكون حل المعادلة ص ن+١ = (١، ١) $^{ن+١}$ (١٠٠٠) + $\sum_{ك=٠}^{ن}$ (١، ١) $^{ن-ك}$ (٣٠)

ولأن مجمـوع المتواليـة الهندسـية ١+ م + م^{٢} + ٠٠٠ + م^{ن} = (م $^{ن+١}$– ١) /(م – ١)، ولنا يكتب هذا الحل بالصيغة

ص ن+١ = ١٠٠٠ (١، ١) $^{ن+١}$ +٣٠ $\left(\frac{(١، ١)^{ن+١} - ١}{١، ١ - ١}\right)$، فيكون ص ٢٠ ≈ ٨٤٤٥.



وبالإمكان حل بعض معادلات الفروق غير الخطية التي تماثل المعادلات التي وردت في البند (١- ٤) وسندرس هنا اثنين منها:

فالمعادلة $\text{ص}_{\text{ن}+١} = \text{م}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}} / (١ - \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}})$.......... (١- ٦٩)

يمكن ان تكتب بالشكل

$\text{ص}_{\text{ن}+١} = \text{م}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}} + \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}+١}$.................... (١- ٧٠)

وهذه تناظر معادلة برنولي (١- ٣٦).

فكلما صنفنا هناك نبدأ بتجربة التعويض

$\text{ع}_{\text{ن}} = \dfrac{١}{\text{ص}_{\text{ن}}}$..(١-٧١)

فنبعد قسمة طرفي (١- ٧٠) على $\text{ص}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}+١}$، فينتج:

$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{م}_{\text{ن}}\,\text{ع}_{\text{ن}+١} + \text{ف}_{\text{ن}}$ .... (١ – ٧٢)

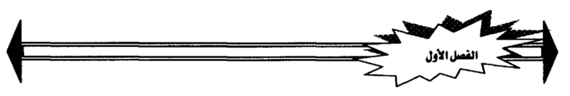
أي أن $\text{ع}_{\text{ن}+١} = \dfrac{\text{ع}_{\text{ن}} - \text{ف}_{\text{ن}}}{\text{م}_{\text{ن}}}$

وباستعمال طرفي هذا البند نجد ان:

$$\text{ع}_{\text{ن}+١} = \left(\prod_{\text{ك}=٠}^{\text{ن}} \text{م}_{\text{ك}}^{-١}\right)\text{ع}_{٠} - \sum_{\text{ك}=٠}^{\text{ن}} \left(\prod_{\text{ي}=\text{ك}+١}^{\text{ن}} \text{م}_{\text{ي}}^{-١}\right)\frac{\text{ف}_{\text{ك}}}{\text{م}_{\text{ك}}}$$

ونعوض (١ – ٧١) في (١ ٧٤) فينتج الحل:

$$\text{ص}_{\text{ن}+١}^{-١} = \left(\prod_{\text{ك}=٠}^{\text{ن}} \text{م}_{\text{ك}}^{-١}\right)\text{ص}_{٠}^{-١} - \sum_{\text{ك}=٠}^{\text{ن}} \left(\prod_{\text{ي}=\text{ك}}^{\text{ن}} \text{م}_{\text{ي}}^{-١}\right)\text{ف}_{\text{ك}}$$



وبالمثل لدينا معادلة ركاتي (في الفروق) وهي لا خطية.

$$ص_{ن}\, ص_{ن+1} + أ_{ن}\, ص_{ن} + ب_{ن}\, ص_{ن-1} = حـ_{ن} \quad ....(1-75).$$

ولايجاد التشابه بين هذه ومعادلة ركاتي التفاضلية (١-٣٩)، نكتب (١ -٧٥) بالشكل

$$(ص_{ن} - ص_{ن-1}) + ص_{ن}\, ص_{ن+1} + \{(أ_{ن} - 1)\, ص_{ن} + (ب_{ن} + 1)\, ص_{ن-1}\} - حـ_{ن} = 0$$

ولكي نحصل على معادلة خطية، نعوض $ص_{ن} = \frac{س_{ن}}{س_{ن+1}} - ب_{ن}$، في المعادلة (١-٧٥)، فبعد الاختصار تصبح (١-٧٥) بالشكل

$$(أ_{ن}\, ب_{ن} + حـ_{ن})\, س_{ن+1} - (أ_{ن} - ب_{ن-1})\, س_{ن} - س_{ن-1} = 0 \quad ..(1-76).$$

وهذه المعادلة خطية من الرتبة الثانية. وفي الفصل ٤ سندرس طرق حل هذه المعادلات عندما تكون $أ_{ن}$، $ب_{ن}$، $حـ_{ن}$ ثوابت.

التمارين (١-٦)

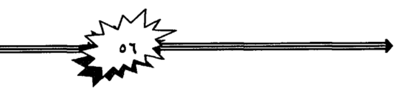
في التمارين من ١ الى ٩ أوجد الحل العام لكل معادلة فرق وحيث تعطى شرطا ابتدائيا أوجد حلا خاصا يحققه:

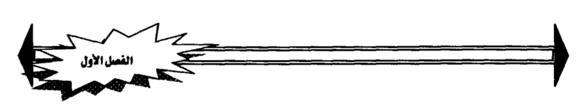
١. $ص_{ن+1} - ص_{ن} = 2^{-ن}$

٢. $ص_{ن+1} = \frac{ن+5}{ن+3}\, ص_{ن}$

٣. $ص_{ن+1} - 3\, ص_{ن} = 3\, ص_{ن+1} - ص_{ن}$

٤. $2\, ص_{ن+1} = ص_{ن}$، $ص_{0} = 1$





٥. (ن + ١) ص $_{ن+١}$ = (ن + ١) ص $_{ن}$ = ص. = ١

٦. ص $_{ن+١}$ = ن ص $_{ن}$

٧. ص $_{ن+١}$ − هـ $^{-٢ن}$ ص $_{ن}$ = ٢، ص = ٢

٨. ص $_{ن+١}$ − ن ص $_{ن}$ = ن!، ص. = ٥

٩. ص $_{ن+١}$ − هـ $^{-٢ن}$ ص $_{ن}$ = هـ $^{-ن٢}$

١٠. يتلاشى الراديوم بمعدل ١ في المئة كل ٢٥ سنة فإذا أخذنا عينة من الراديوم مقدارها غ غرامات وكان غ $_{ن}$ هو ما يبقى بعد ٢٥ ن سنوات فأوجد معادلة غ $_{ن}$ وأوجد منها كم يبقى من العينة بعد مئة سنة؟

١١. أجريت لعبة بقطعة نقد كتب على أحد وجهيها (١) وعلى الوجه الاثني (٢) فكان اللاعب يقذف القطعة مرات متتالية وسجل له مجموع نتائجه من آحاده اثنينات فليكن ح $_{ن}$ هو احتمال ان يحصل اللاعب ذات مرة على المجموع ن أثبت أن ح $_{ن}$ = ١- $\frac{١}{٢}$ ح $_{ن-١}$ ثم على اعتبار أن ح. = ١ استنتج قانون ح $_{ن}$

١٢. لوضع نموذج رياضي لعدد السكان في مجتمع ما افترض أن ح$_{ن}$، احتمال ان ينجب الزوجان ن من المواليد، هو حسب المعادلة ح $_{ن}$ = ٧ وح $_{ن-١}$.
أوجد ح $_{ن}$ بدلالة ح. و أوجد قيمة ح. من العلاقة:

ح. + ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ +... = ١

١٣. في نموذج آخر للتمرين ١٢ كان ح $_{ن}$ (١/ ن) ح $_{ن-١}$. اوجد هنا ح $_{ن}$ بدلالة ح. واثبت أن ح. = ١/ هـ



١٤. ليكن $\text{س}_{\text{ك}}$ عدد تباديل ن اشياء بأخذها كل ك معاً. فمع كل تبديل من تباديل ك نحصل على ن - ك تبادل من ك + ١ أشياء، وذلك بأخذ واحد من الاشياء الباقية، وعددها ن - ك، ووضعه جانباً، فيكون $\text{س}_{\text{ك}+1} = (\text{ن} - \text{ك})\,\text{س}_{\text{ك}}$. اثبت أن عدد تباديل ن أشياء مأخوذه كل ك معاً هو $\text{ن}!/(\text{ن} - \text{ك})!$.

١٥. في التمرين ١٤، ليكن $\text{س}_{\text{ن}}$ هو عدد توافيق ن اشياء وحيث لديهم، الترتيب. فكل تبديل يشمل ك + ١ أشياء (بترتيباتها المتلفة) يظهر ك + ١ مرات وعلى هذا يكون

$$\text{س}_{\text{ك}+1} = \frac{\text{ن} - \text{ك}}{\text{ك}+1}\,\text{س}_{\text{ن}}$$

اثبت أن عدد توافيق ن أشياء مأخوذه كل ك معاً $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ك})!\,\text{ك}!} = \binom{\text{ن}}{\text{ك}}$

ويسمى الطرف الأيسر بالمعامل الحداني **Binomial Coefficient**

١٦. حول المعادلة $\text{ص}_{\text{ن}}\,(1 + \text{أ}\,\text{ص}_{\text{ن}-1}) = 1$ الى معادلة خطية من الرتبة الثانية، وذلك بتعويض مناسب.

١٧. بتعويض مناسب حول كل واحدة من معادلتي ركاتي التاليتن الى معادلة خطية من الرتبة الثانية

أ) $\text{ص}_{\text{ن}+1}\,\text{ص}_{\text{ن}} + 2\,\text{ص}_{\text{ن}+1} + 4\,\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ن}$

ب) $\text{ص}_{\text{ن}+1}\,\text{ص}_{\text{ن}} - 3^{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}+1} + (3^{\text{ن}-1} - 2)\,\text{ص}_{\text{ن}} + 3^{\text{ن}}\,(3^{\text{ن}+1} - 2) = 0$

١٨. حل المعادلة $\text{ص}_{\text{ن}+1} = 2\,\text{ص}_{\text{ن}}^{2} - 1$ وذلك بتعويض $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{جتا}\,\text{س}_{\text{ن}}$

١٩. معادلة كليروه في الفروق تتخذ الشكل $ص_{ن} = ن\,(ص_{ن+١} - ص_{ن}) + ف\,(ص_{ن+١} - ص_{ن})$ لاحظ أن الفرق الأول $ص_{ن+١} - ص_{ن}$ (ويعبر عنه بالرموز $\Delta\, ص_{ن}$) يقوم بدور المشتقة في المعادلات التفاضلية ففي المعادلة $ص_{ن} = ن\, \Delta\, ص_{ن}\; (\Delta ص_{ن})^{٢}$ خذ أولا الفرق الأول لكل من الطرفين ثم عوض $\Delta\, ص_{ن} = س_{ن}$ ثم بين:

أ) ان المعادلة الناتجة يمكن أن تكتب

$$(س_{ن+١} - س_{ن})\,(س_{ن+١} + س_{ن} + ن + ١)$$

(ب) أن الشرط

$س_{ن+١} - س_{ن} = ٠$ يعطي الحل العام $ص_{ن} = ن\,حـ + حـ^{٢}$، حيث حـ اعتباطي

(جـ) أن الشرط $س_{ن+١} + س_{ن} + ن + ١ = ٠$ يتضمن أن

$ص_{ن+١} = - س_{ن}\, س_{ن+١}$ وهكذا نحصل على الحل المنفرد

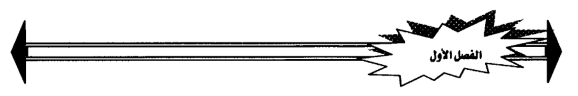
$$ص_{ن} = \left[\sqrt{ص_{٠}} + \frac{١-(-١)^{ن}}{٤}\right] - \left(\frac{ن}{٢}\right)^{٢}$$

(١-٧) تطبيقات على معادلات الفروق

ذات الرتبة الأولى. طريقة نيوتن

من المسائل المهمة في الرياضيات إيجاد جذور أي معادلة معطاه، مثل:

$ق(س) = ٠$ .... (١-٧٧)



فباستعمال نظرية تايلور، مركزه على قيمة س ن، نعبر عـن هـذا الاقـتران بالصيغة:

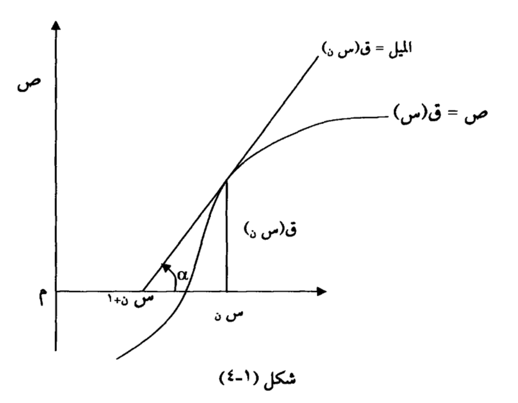
$$0 = \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}_{\text{ن}}) + \text{قَ}(\text{س}_{\text{ن}})(\text{س}-\text{س}_{\text{ن}}) + \frac{\text{قً}(\text{س}_{\text{ن}})}{!2}(\text{س}-\text{س}_{\text{ن}})^2 + \ldots \quad (1\text{-}78)$$

فإذا استبقينا الحدين الأولين في الطرف الأيسر وحذفنا الحدود الأخرى ثم حللنا المعادلة لايجاد قيمة س ينتج:

$$\text{س} = \text{س}_{\text{ن}} - \frac{\text{ق}(\text{س}_{\text{ن}})}{\text{قَ}(\text{س}_{\text{ن}})} .$$

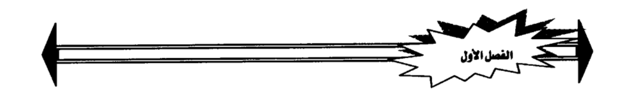
وتسمى هذه المعادلة صـيغة نيـوتن لحـل المعـادلات والقيمـة $\text{س}_{\text{ن}+1}$ هـي تقريب لجذر من جذور المعادلة (١-٧٧). وبالطبع ما دمنا قد اسقطنا كل الحدود عدا اثنين من متتالية تيلور للحصول على هذه القمية فمن غير المحتمل أن تكـون $\text{س}_{\text{ن}+1}$ جذراً للمعادلة (١- ٧٧) ولكـن اذا كـان $\text{س}_{\text{ن}}$ قريبـاً مـن جـذر مـا، س، تكون الكمية س - $\text{س}_{\text{ن}}$ قريبة من الـصفر وهكـذا يمكـن الهمـال القـوى العليـا للمقدار س - $\text{س}_{\text{ن}}$ في متتالية تيلور، فإذا كتبنا (١- ٧٩) على النحو:

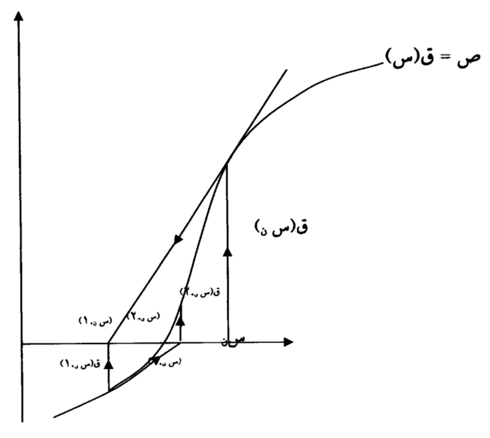
$$\text{قَ}(\text{س}_{\text{ن}}) = \frac{\text{ق}(\text{س}_{\text{ن}})}{\text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{\text{ن}+1}}$$



شكل (١-٤)

نحصل على تفسير تخطيطي للعملية (انظر الشكل ١-٤)، فالمشتقة التفاضلية ق (س ن) هي ميل المماس المنحني ص = ن (س) عند س = س ن، وهذا الميل هو ظا α والخط المماس يقطع محور س عند س ن+١ العملية لإجاد الجذر تشتمل على إيجاد جذر ابتدائي س. بالحد س ثم تطبق (١- ٧٩) مرة بعد مرة لايجاد المتتاليات س ن، أولاً بأن تتقارب هذه المتتالية الى للمعادلة (١- ٧٧)، (انظر الشكل ١-٥) والشروط التي تضمن ان تسير العلمية سيراً صحيحاً تبينها النظرية التالية:





الشكل (١- ٥)

النظرية (١-١) اذا كان ق (س) معرَّفاً في الفقرة أ ≥ س ≥ ب، ومتصلا وقابلاً للاشتقاق مرتين ويفضي الى مشتقتين متصلتين، ويحقق ما يلي:

i) ق (أ) ـ ق (ب) مختلفا الاشارة ،

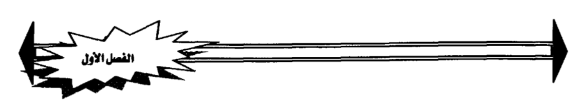
ii) قَ (س) = ٠ لكل س في أ ≥ س ≥ ب ،

iii) قً (س) لا يغير اشارته في الفترة أ ≥ س ≥ ب،

iv) وإذا كان قَ (أ) ≥ قَ (ب) يكون | ق (أ) / قَ (أ) | ≥ ب - أ

وإذا كان قَ (ب) ≥ قَ (أ) يكون | ق (ب) / قَ (ب) | ≥ ب - أ





فعندها تؤدي طريقة نيوتن الى جذور تتقارب نحو جذر وحيد س* للمعادلة ق (س) = ٠ شرط أن يكون الجذر الابتدائي س. ضمن الفترة أ ≤ س ≤ب.

وتستعمل هذه الطريقة في مسائل عملية كثيرة

المثال (١):

ليكن ع > ١، ولنضع خوارزمية لايجاد الجذر التربيعي للعدد ع فتأخذ ق (س) = س^{٢} - ع، س > ٠ فيكون قَ ٠ س) = ٢ س وطريقة نيوتن تؤدي الى معادلة الفرق التالية:

$$س_{ن+١} = س_{ن} - \frac{س_{ن}^{٢} - ع}{٢س_{ن}}$$

أي ان

$$س_{ن+١} = \frac{١}{٢}\left(س_{ن} + \frac{ع}{س_{ن}}\right) \quad ....(١-٨٠)$$

ويمكن بسهولة معالجة الصيغة (١-٨٠) بحاسبة جيب فإذا أخذنا س. أي عدد صحيح في الفترة ١ ≤ س ≤ ١ +ع نقسم ع على س. ونضيف س. الى خارج القسمة فنصف الخارج هو $س_{١}$

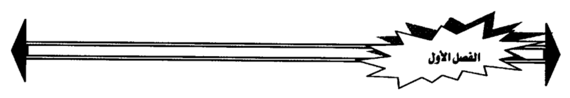
ونعيد العملية على $س_{ن}$ لنحصل على $س_{ن+١}$، حيث ن = ١، ٢، ٣...

فمثلاً، إذا كان ع = ١٥، س. =ع، ينتج من (١- ٨٠) ما يلي:

$س_{١}$ = ٣,٨٧٥، $س_{٢}$ = ٣,٨٧٢٩٨٤، $س_{٣}$ = ٣,٧٨٢٩٨٣٣٤٥

وهذا صحيح لثماني منازل عشرية وإذا اخترنا قيم أخرى للرمز س. فقد





يحتاج الامر الى خطوات أكثر حتى نحصل على هذا القدر من الدقة فحسن اختيار القيمة الابتدائية يقلل من خطوات الحل.

ولكي نتبين أن الطريقة تنجح دائماً،

نفرض أ = ١، ب = ١+ ع نختبر شروط النظرية (١-١) نلاحظ أن ق (١) = ١ – ع < ٠، ق (١+ ع) = ١+ ع + ع ٢ > ٠، قَ (س) = ٢ س > ٠ لكل > ١، قً (س) = ٢، لذلك نتحقق الشروط (أ)، (أأ)، (أأأ).

ولأن قَ (١) = ٢ > ٢ + ٢ ع = قَ (١ + ع) ٢

| ق(١) / قَ(١) | = (ع − ١)/٢ ≤ ع = (ع+ ١) - ١،

فإن الشرط (iv) يتحقق أيضاً أي أن طريقة نيوتن تفضي الى حل وحيد في الفترة ≤ س≤ ١+ ع وليس ضرورياً تحقيق شروط النظرية (١–١) قبل تطبيق طريقة نيوتن، الا ان عدم التحقق من ذلك قد ينجم عنه أحد الأمرين التاليين:

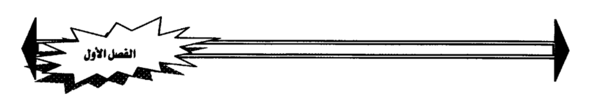
١. تباعد المتتالية { س ن } دون ان تقضي الى حل.

٢. فوات فرصة الحصول على جذور اخرى ضمن الفترة { أ ، ب }.

المثال (٢):

لايجاد الجذر الرأي للعدد ع > ١، نحل المعادلة:

ق (س) = س د – ع = ٠ ، س > ٠،



بطريقة نيوتن، فينتج:

$$س_{ن+1} = س_ن - \frac{س_ن^ر - ع}{ر\, س_ن^{ر-1}} = \left(1 - \frac{1}{ر}\right) س_ن + \frac{ع}{ر\, س_ن^{ر-1}}$$

وهذه الصيغة تتقارب الى $ع^{1/ر}$ مهما تكن القيمة التي تختارها للحد $س_. > 1$.

المثال (٣):

أوجد جذور الحدودية:

ق (س) = س ٣ + س ٢ + ٧س -٣.......................... (١- ٨١)

نلاحظ أن ق (٠) = -٣، ق (١) = ٦، هناك جذر بين ٠، ٦ للمعادلة (١ – ٨١) لنجعل أ = ٠، ب = ١

وبسهولة نستطيع أن نتبين ان الشروط (i)، (ii)، (iii) في النظرية (١- ١) تتحقق. ولان ق/ (٠) = ٧ < ١٢ = ق/ (١)، ٣/ ٧ < ١، فالشرط (iv) يتحقق ايضا. فيكون:

$$س_{ن+1} = س_ن - \frac{ق(س_ن)}{ق'(س_ن)} = \frac{٢س_ن^٣ + س_ن^٢ + ٣}{٣س_ن^٢ + ٢س_ن + ٧} \quad ....(١-٨٢)$$

هو صيغة نيوتن للمعادلة (١- ٨١). فنجد س. بالحزر، ولتكن س. = ٠ ن فيكون $س_1$ = ٤٢٨٦ , ٠ ن $س_2$ = ٣٩٧٣ , ٠، $س_3$ ٣٩٧١ , ٠ وهذا صحيح لأربع منازل عشرية.





المثال (٤):

اذا شئنا ان نجد مقلوب أي عدد، بلا قسمة نستعمل الخط رزمية التالية وهي تستعمل في بعض الحاسبات: نتخذ ق (س) = ١/ س − ع، فيكون

ق/ (س) = -١ / س^٢، والقاعدة (١- ٨٩) تعطي

$$\text{س}_{\text{ن}+1} = \text{س}_{\text{ن}} - \frac{\text{س}_{\text{ن}}^{-1} - \text{ع}}{\text{س}_{\text{ن}}^{-2}} = \text{س}_{\text{ن}}\,2 - \text{ع}\,\text{س}_{\text{ن}}$$

وهذا يتقارب الى ١ /ع لكل س. حيث. < س. < ٢ /ع. فلحساب ١/ حيث ٤/٥٩٢٦ , ٣، ونجعل س. = ٥ , ٠ فنجد ما يلي:

س. = ٥ , ٠ ، س ٣ = ٣١٤٧ , ٠،

س١ = ٠ , ٢١٤٦ ن، س٤ = ٠ , ٣١٨٢٧،

س٢ = ٢٨٤٥،, ٠ ، س٥ = ٠ , ٣١٨٣٠٩٨٩،

والأخير صحيح لثماني منازل عشرية.

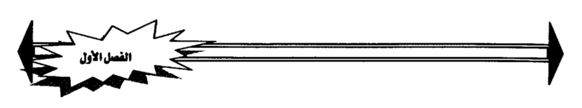
لاحظ ان التقارب سريع في المثالين (١) و (٤) ان سرعة التقارب في قاعدة نيوتن تتناسب مع العباره التربيعية (س − س ن)^٢. وهي عامل في كل الحدود التي حذفناها من (١- ٧٨).

لهذا تسمى احيانا بالتفارب التربيعي **Quordratic Converqence**.

التمارين (١- ٧)

١. باستعمال قاعدة نيوتن، ضع خوارزمية لحساب الجذر التكعيبي لاي عدد موجب ثم احسب ∛٦ لاربع منازل.





٢. احسب قيمة $\frac{1}{6}$ لثماني منازل عشرية، بدون قسمة. ابدأ خطوات نيوتن بالعدد ١٥, ٠.

٣. بين بالرسم ان هنالك حلا واحدا للمعادلة س = هـ^-س^ ثم أوجد هذا الحل لاربع منازل عشرية باستعمال قاعدة نيوتن.

٤. ضع خوارزمية تعطي، بعد اختيار مناسب لقيمة س.، أصغر جذر موجب للمعادلة

٤ جتا س= هـ^س^ ثم احسب هذا الجذر لاربع منازل عشرية. {ارشاد: ضع رسما بيانيا لكل من ٤ جتا س، هـ^س^ لكي ترى ما الذي يجري}.

٥. أوجد لاربع منازل عشرية أصغر جذر موجب للمعادلة $\frac{1}{2}$ ظا س = س.

٦. ضع باللغة الاساسية **BASIC**، أو بلغة فورتران، برنامج كمبيوتر لإجراء العمليت الحسابية اللازمة في التمارين ٣، ٤، ٥.

٧. يمكن اعتبار المشتقة ق/ (س ن) مساوية بالتقريب للمقدار

$$\frac{ق(س_ن) - ق(س_{ن-1})}{س_ن - س_{ن-1}} ،$$

وهو خارج فرق على فرق، وواضح ان هذا الخارج يقترب من قيمة المشتقة كلما اقترب الفرقان من الصفر، عوض بهذه الصيغة عن المشتقة في قاعدة نيوتن، واستنتج من ذلك معادلة فروق من الدرجة الثانية تحدد خطوات متتابعة.

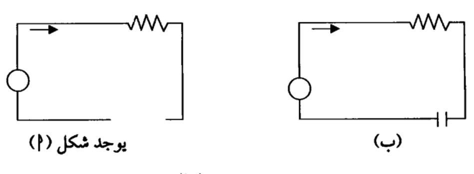
(ملاحظة: يغطي هذا الطريقة لحل المعادلات العددية تسمى requla * falsi. والطريقة تفيد اذا كان ايجاد المشتقة غير مرغوب فيه).



٨. باستعمال طريقة التمرين ٧، ضع خوارزمية لحساب الجذور التربيعية، واخرى لحساب الجذور التكعيبية، ثم احسب $\sqrt{15}$ ، $\sqrt[3]{6}$ بهما، وقارن نتائجك بما ينتج بطريقة نيوتن (لاحظ ان هذه الطريقة تقتضي اختيار قيمتين ابتدائيتين).

(١ - ٨) الدوائر الكهربائية البسيطة.

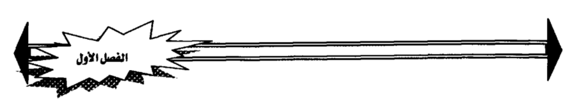
في هذا البند ندرس دوائر كهربائية بسيطة تحتوي على أجهزة مقاومة وحث أو مواسعة، تتصل على التوالي بمصدر دافعة كهربائية (ق د ك). وهي كالمبينة بالشكل (١-٦ أ ، ب). ويسهل فهم عملها دون معرفة متخصصة بالكهرباء.



الشكل (١-٦)

وهذه الطريقة استعملها العرب بكثرة وسموها حساب الخطأين، وعنهم أخذها البيزنطيون، وقد كانت الطريقة تستعمل على نحو بدائي في مصر الفرعونية.

١. ق: قوة الدافعة الكهربائية (ق د ك)، وتقاس بالفولت. وهي عادة بطارية ومولد كهربائي يدفع بشحنة ش (كولوم) فينطلق تيار ت (أمبير).



ويعرف بأنه سرعة تدفق الشحنة. فنكتب

$$ت = \frac{د ش}{د ن} \qquad (١-٨٣)$$

٢. جهاز مقاومة (resistor) مقاومته و(أوم) وهو من مركبات الدائرة ويقاوم التيار ببعثرة طاقته على شكل حرارة، فيحدث انخفاضا في الفليته وهو حسب قانون أوم

$$ق_و = وت \qquad (١-٨٤).$$

٣. جهاز حث (inductor) مقدار حثه (inductance) ح (هنري) وهو يقاوم أي تغير في التيار بخفض الفولتية بمقدار.

$$ق_ح = ح \frac{د ت}{د ن} \qquad (١-٨٥)$$

٤. مواسع (capacitor) مواسعته (capacitance) س (فاراد) تختزن الشحنة وبذا تقاوم تدفق شحنات أخرى فتحدث انخفاضا بالفوليته مقداره.

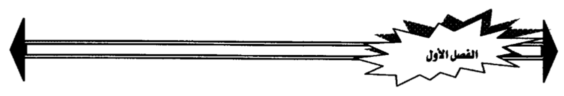
$$ق_س = \frac{ش}{س} \qquad (١-٨٦)$$

والكميات و، ح، س هي عادة ثابتة تحددها اجهزة الدارة الكهربائية. وأما ق فقد تكون ثابتة أو متغيرة تتبع الزمن. والمبدأ الاساسي الذي يسري على هذه الدوائر هو قانون الفولتية المنسوب للعالم كرتشوف، وهو:

المجموع الجبري لانخفاضات الفولتيهة حول الدائرة المغلقة: صفر

ففي الدارة المبينة بالشكل ١-٦ (أ) تحدث المقاومة والحث حفظا في





الفولتية مقداره ق $_{و}$، ق $_{ح}$ على التوالي. اما قادك فهي مصدر يمد الدئرة بالقوة ق (أي انه يخفض الفولتية بمقدار – ق.

فيكون قانون كرتشوف: ق $_{و}$ + ق $_{ح}$ – ق = ٠

فبنقل ق الى الطرف الثاني للمعادلة واستعمال المعادلتين (١- ٨٤) و (١- ٨٥) للتعويض عن ق $_{و}$، ق $_{ح}$ ينتج:

$$ح \frac{د ت}{د ن} + و ت = ق \qquad (١-٨٧)$$

وهذه المعادلة تفاضلية خطية. فنقسم على ح ونستعمل المعادلة (١- ٣٤) فينتج:

$$ت_{ن} = هـ^{-نو/ح} \left[\frac{١}{ح} \int ق(ن) هـ^{ون/ح} د ن + ح \right] \qquad (١-٨٨)$$

فاذا كانت ق ثابتة، تتحول المعادلة الى الشكل:

$$ت_{ن} = \frac{ق}{و} + ح هـ^{-ون/ح}،$$

فاذا وضعنا ن = ٠ ينتج:

$$ق_{ن} = \frac{ق}{و} + \left[ت(ن) - \frac{ق}{و} \right] هـ^{-ون/ح} \qquad (١-٨٩)$$

وتزايد ق تقترب قيمته الحد الاخير في هذه المعادلة من الصفر، لذلك يسمى بالجزء الزائل من التيار فيبقى لدينا ق/ و وهو الجزء ذو الحالة الثابتة من التيار.

المثال (١):

وصلنا حثا مقداره ٢ هنري (هن) ومقاومة مقدارها ١٠ أوم (م) مع ق دك مقدارها ١٠٠ فولت (ف). فاذا علم ان التيار كان صفرا عندما كان ن = ٠ فكم كان التيار بعد ١, ٠ ثانية؟

نطبق المعادلة (١- ٨٩) متخذين ق =١٠٠، و= ١٠، ح = ٢، ت(٠) = ٠

ن = ٠و١ فينتج

ث (١, ٠) = ١٠ (١- هـ^{-٥,٠}) = ٣٩, ٣ أمبير.

المثال (٢)

في المثال السابق اذا كانت ق = ١٠٠ جا ٦٠ ن فولت واستعملنا المعادلة (١- ٨٨) والقانون (٥٠) في الملحق ١ ينتج

ت (ن) = هـ^{-٥ن} [٥٠ j(جا ٦٠ ن). هـ^{٥ن} د ن + حـ]

= هـ^{-٥ن} [٥٠ هـ^{٥ن} (٥ جا ٦٠ن – ٦٠ جتا ٦٠ ن) / ٣٦٢٥ + ح]

= (٢جا ٦٠ن – ٢٤ جتا ٦٠ن) / ٢٩ + ح هـ^{-٥ن}

فاذا وضعنا ن = ٠ نجد ان حـ = ٢٤/ ٢٩ فيكون:

ت (١, ٠) = (٢جا ٦ – ٢٤ جتا ٦) / ٢٩ + (٢٤ / ٢٩) هـ^{-٥,٠} = -٣١, ٠ أمبير.

وفي الدائرة في الشكل ١-٦ (ب) يكون ق_د + ق_س – ق = ٠.

أي ان

$$و\frac{د ش}{د ن}+\frac{ش}{س}=ق$$، لأن ن= دس/ دن..............................(١-٩٠)

وهذه المعادلة خطية فيكون:

ش (ن) = هـ $^{-ن/س و}$ [$\frac{١}{و}$]ق (هـ $^{ن/س و}$ د ن+ حـ]................(١-٩١)

فاذا كانت ق ثابتة ينتج: ش(ن) = ق س + [ش (٠) – ق س]هـ$^{-ن/س و}$. (١-٩٢).

المثال (٣) اذا وصلنا مقاومة مقدارها ٢٠٠٠ أوم ومواسعة مقدارها ٥ × ١٠$^{-٦}$ فاراد (ف)، على التوالي بقوة ١٠٠ فولت. فكم يكون التيار بعد ١,٠ ثانية علما بأن ت (٠) = ٠١,٠ امبير؟

في المعادلة (١- ٩٢) نضع و = ٢٠٠٠، س = ٥ × ١٠$^{-٦}$، ق = ١٠٠ فتكون الشحنة في اللحظة ن، بدلالة الشحنة عند ن = ٠، كما يلي:

ش (ن) = ٥ × ١٠$^{-٤}$ + { ش (٠) – ٥ × ١٠$^{-٤}$ } هـ$^{-١٠٠ن}$........ (١-٩٣).

ولان ت = د ش / د ن، نجد ان

ت (ن) = (-١٠٠) { ش (٠) – ٥ × ١٠$^{-٤}$ } هـ$^{-١٠٠ن}$

نجعل ن= ٠، فينتج ش (٠) = ٤ × ١٠$^{-٤}$ كولوم، ويكون:

ت (١,٠) = ١٠$^{-٢}$ هـ$^{-١٠}$ أمبير.



التمارين (١-٨)

١. حـل مـسألة المثـال (٣) علـى اعتبـار ان ق د ك هـي ١٠٠ جـا١٢٠πن فولت.

٢. وصلنا حثا مقداره هنري واحـد ومقاومـة مقـدارها ٢ أوم علـى التـوالي ببطارية قوتها ٦ هـ$^{-١,٠٠٠١٠ ن}$ فولت.

وفي البدء لم يكن يجري أي تيار. فمتى يصبح التيار ٥, ٠ أمبير.

٣. وصلنا مقاومة متغيرة مقدارها و = ١/ (٥+ن) أوم مع مواسـعة مقـدارها ٥ × ١٠$^{-٦}$ فاراد على التوالي بقوة ق د ك تساوي ١٠٠ فولت. فاذا كـان ش (٠) =٠ فكم تكون الشحنة على المواسعة بعد دقيقة؟

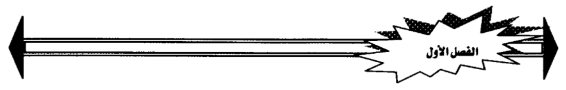
٤. في دائرة المقاومة والمواسعة (في الشكل ١-٦ ب) حيث الفولتيـة ق ثابتـة، كم يستغرق التيار قبل أن يخفض الى نصف قيمته الأصلية؟

٥. إذا كانت الفولتية في دائرة مقاومة ومواسعة هي ق (ن) = قِ صَ t٢ / w هي فترة الدائرة وكانت الشحنة الابتدائية صفراً، فأوجد الـشحنة والتيـار بدلالة و، س، w، ن.

٦. بين أن التيار في التمرين ٥ يتكون من جزأين، واحد ثابت الحالة لـه فـترة مقدارها t٢/ w، وواحد زائل يقارب الصفر بمرور الزمن.

٧. في التمرين ٦، بين أنه إذا كانت وصغيرة فإن الحد الزائل قد يكـون كـبيراً رغم ان قيم ن صغيرة (لهذا قد تحـترق الفاصـلة الكهربائيـة إذا نقـر احـد مفاتيح الدورة).





٨. أوجد التيار الثابت الحالة إذا علم أن مقاومة ٢٠٠٠ أوم وسعة ٣ x ١٠-٦ فاراد وقد وصلتا على التوالي بقوة دافعة تبادلية مقدارها ١٢٠ جتا٢ ن فولت.

(١-٩) منحنيات المطاردة*

تنشأ معادلات تفاضلية مجتمعة عند دراسة المسارات التي تتبعها القناصة في مطاردة فريستها وفي الصفحات التالية أقدم المسائل من هذا القبيل.

المثال (١):

ك حجر ثقيل موضوع في نقطة (م، ٠) (انظر الشكل ١-٧)، ل رجل كان واقفاً عند نقطة الأصل م فإذا أمسك الرجل بطرف سلسلة طولها أ ربط طرفها الآخر بالحجر ك، ثم مشى على محور ص، فما المسار الذي يسكله الحجر ك. وهو يزحف وراء الرجل؟

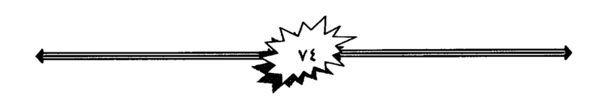
لتسمي هذا المسار بالمجرورة tractrix اذكر الخط ك ل يمسك هذا المسار فميله $\frac{د ص}{د س}$ يعطي بالمعادلة

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{-\sqrt{م^{2} - س^{2}}}{س} \quad \text{.................................} (١-٩٤)$$

وذلك لأن ك ل = م.

نكامل طرفي – (١-٩٤) باستعمال القانون ١٦ في الملحق ١، فيكون

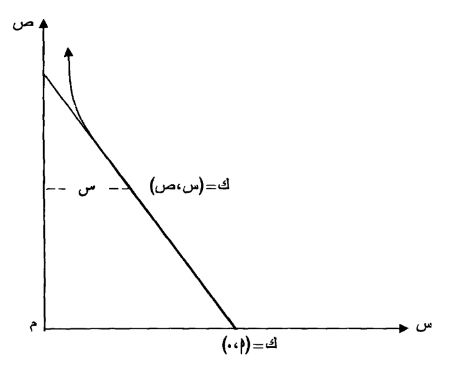
$$ص = -\int \frac{\sqrt{م^{2} - س^{2}}}{س} د س + ج$$



$$= \text{أ}\ \text{ل ي}\left(\frac{\text{أ}+\sqrt{\text{أ}^{2}-\text{س}^{2}}}{\text{س}}\right)-\sqrt{\text{أ}^{2}-\text{س}^{2}}+\hat{\text{ج}} \quad ....(١-٩٥)$$

ولأن ص =. عند س= أ، ينتج أن حـ =. ولذا يكون مسار المجرورة

$$\text{ص} = \text{أ}\ \text{لي}\left(\frac{\text{أ}+\sqrt{\text{أ}^{2}-\text{س}^{2}}}{\text{س}}\right)-\sqrt{\text{أ}^{2}-\text{س}^{2}}\ .$$

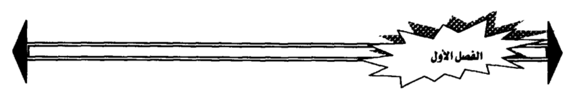


الشكل (١-٧)

المثال (٢):

ك صقر عند النقطة (أ،.) شاهد الحمامة ل عند نقطة الأصل تطير على طول محور ص بسرعة ع، فطار باتجاه الحمامة بسرعة ع فما مسار الصقر؟





لنقل أن ن =. عندما طار الصقر باتجاه الحمامة، فبعد ن ثوان تكون الحمامة في النقطة ل=.

(.، ع ن) ويكون الصقر في النقطة ك = (س، ص) والخط ك ل مماس للمسار المطلوب (انظر الشكل ١-٧) وميله

$$\text{ص}' = \frac{\text{ص} - \text{ع ن}}{\text{س}} \quad \text{فيكون}$$

$$\text{س ص}' - \text{ص} = \text{ع ن}.$$

وكذلك فإن طول المسافة التي قطعها الصقر هي، باستعمال قاعدة طول القوس، ق

$$\text{ع ن} = \int \text{د ق} = \int_{\text{س}} \sqrt{1 + (\text{ص}')^2}\ \text{د س} \quad \text{.........................(١-٩٧)}$$

تحل المعادلتين (١-٩٦)، (١-٩٧) لإيجاد ن في كل منهما، ثم نعادل الناتجتين فيكون

$$\frac{\text{ص} - \text{س ص}'}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{غ}} \int_{\text{س}} \sqrt{1 + (\text{ص}')^2}\ \text{دس} \quad \text{.........................(١-٩٨)}$$

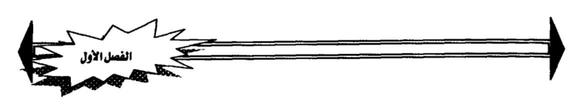
نفاضل الطرفين في (١-٩٨) بالنسبة الى س، فينتج:

$$\text{س ص}'' = \frac{\text{ع}}{\text{غ}} \sqrt{1 + (\text{ص}')^2} \quad \text{...(١-٩٩)}$$

نجعل صَ = ف فتتحول المعادلة (١-٩٩) الى:

$$\text{س ف}' = \frac{\text{ع}}{\text{غ}} \sqrt{1 + \text{ف}^2}$$





فنفصل المتغيرين وينتج:

$$\frac{\text{د ف}}{\sqrt{1+\text{ف}^{2}}}=\frac{\text{ع}}{\text{غ}}\,\frac{\text{د س}}{\text{س}}$$

وبمكاملة الطرفين، ينتج:

$$\text{لي}\left(\text{ف}+\sqrt{1+\text{ف}^{2}}\right)=\frac{\text{ع}}{\text{غ}}\ \text{لي س} - \text{حـ}$$ ....(١-١٠٠)

ولأن ف = صَ =. عنــد س = م (ميــل ك ل، عنــد ن = ٠) ينــتج أن حـ = $\frac{\text{ع}}{\text{غ}}$لي م فنرفع الطرفين وينتج

$$\text{ف}+\sqrt{1+\text{ف}^{2}}=\left(\frac{\text{س}}{\text{م}}\right)^{\text{ع}/\text{غ}}$$

وبعد المعالجة الجبرية ينتج:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}=\text{ف}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\text{س}}{\text{م}}\right)^{\text{ع}/\text{غ}}-\left(\frac{\text{س}}{\text{م}}\right)^{-\text{ع}/\text{غ}}\right]$$

فإذا فرضنا أن الصقر أسرع من الحمامة (اي ان غ > ع)، يمكن ان نكامل (١-١٠١) وينتج:

$$\text{ص}=\frac{1}{2}\left[\frac{(\text{س}/\text{م})^{1+\text{ع}/\text{غ}}}{1+\text{ع}/\text{غ}}-\frac{(\text{س}/\text{م})^{1-\text{ع}/\text{غ}}}{1-\text{ع}/\text{غ}}+\text{ح}\right]$$

ولأن ص =. عند س =م، ينتج:

$$\text{حـ}=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\text{ع}/\text{غ}}-\frac{1}{1-\text{ع}/\text{غ}}\right]=\frac{\text{م ع غ}}{\text{غ}^{2}-\text{ع}^{2}}$$

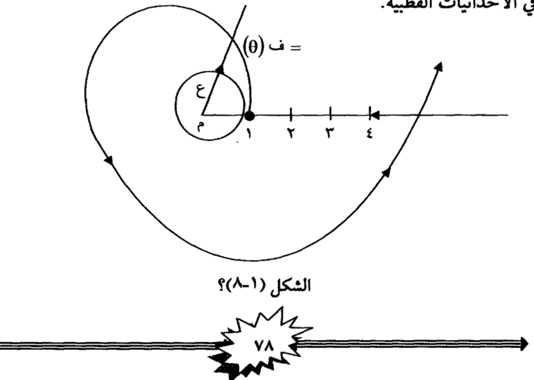
والصقر يدرك الحمامة عنـد س=. ، ص = حــ =م ع غ / $(\text{غ}^{2}-\text{ع}^{2})$ وفي التمرينين ١، ٢ ندرس الحالـة عنـدما تكـون سـرعة الـصقر لاتزيـد عـن سـرعة الحمامة (غ ≤ ع).



المثال (٣):

وقفت مدمرة في وسط ضباب كثيف، وانقشع لضباب للحظة، واكتشفت المدمرة غواصة معادية على بعد ٤ أميال عنها، فعلى فرض أن الغواصة غاصت ومضت بأقصى سرعتها في إتجاه مجهول، فبأي مسار تسير المدمرة لتضمن مرورها من فوق الغواصة، إذا كانت سرعتها ع ثلاثة أمثال سرعة الغواصة؟

نفرض ان المدمرة سارت ثلاثة أميال باتجاه الموضع الذي كانت الغواصة فيه، فعندها تكون الغواصة على محيط دائرة مركزها ذلك الموضع ونصف نظرها ميل واحد، (انظر الشكل (١-٨) وذلك لأن سرعتها ثلث سرعة المدمرة ولأن ووضع الغواصة يسهل تعيينه بالاحداثيات القطبية، فسنلجأ الى هذه الاحداثيات ونكتب ر = ق (c) ونفرض أن هذا هو المسار الذي تسلكه المدمرة لتضمن مرورها من فوق الغواصة، مهما كان الاتجاه الذي تسير فيه الغواصة، فالمسافة التي تقطعها الغواصة حتى تصل الى نقطة الألتقاء هو ر -١ في حين أن المسافة التي تقطعها المدمرة، هي ثلاثة أميال ذلك، هي قوس منحني، نجد طول القوس في الاحداثيات القطبية.



الشكل (١-٨)؟



فيكون؟

$$3(r-1) = \int_0^{\theta} dq = \int_0^{\theta} \sqrt{(dr)^2+(r\,d\theta)^2}$$

$$\int_0^{\theta} \sqrt{(dr/d\theta)^2+r^2}\; d\theta \quad \text{..........................} (1\text{-}103)$$

فنفاضل الطرفين بالنسبة الى θ، ونحصل على المعادلة التفاضلية

$$3\,r' = \sqrt{(r')^2+r^2}\,،$$

وهذه تختصر الى $8\,(r')^2 = r^2$ فنأخذ الجذر االتربيعي للطـرفين، ونفـصل المتغيرين، فينتج

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{8}}$$

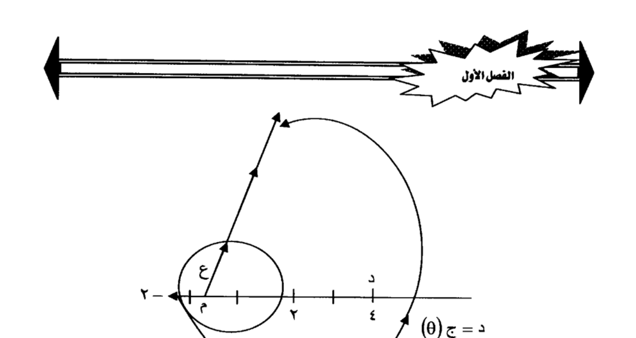
ومن ذلك ينتج أن لي $r = \theta/\sqrt{8} + C$ أي أن

$$r = C\, e^{\theta/\sqrt{8}} \quad \text{......................} (1\text{-}104)$$

ولأن $r = 1$ عند $\theta = 0$، ينتج أن $C = 1$ فالمسار الذي تسلكه المدمرة هو المسار اللولبي $r = e^{\theta/\sqrt{8}}$ ، و ذلك بعد قطع ٣ أميال نحو الموقع الأول للغواصة.

ويلاحظ أن هذا ليس هو المسار الوحيد المدمرة. فمـثلاً قـد نجعـل المـدمرة تقطع ٦ أميال في اتجاه الغواصة (انظر الشكل (١- ٩))





الشكل (١-٩)

فهنا تسلك المدمرة مساراً هو ر = ج(c) ولأن الغواصة في هذه الحالـة قـد قطعت عن نقطة الأصـل، تكـون المـسافة الـتي سـتقطعها حتـى تـصل الى نقطـة الألتقاء هي ر _ ٢، في حين تقطع المدمرة

$$\text{٣}(\text{ر}^{-\text{٢}}) = \int_{\pi}^{\theta} \sqrt{\left(\text{در}/\text{د}\theta\right)^{\text{٢}} + \text{ر}^{\text{٢}}\,\text{د}\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{١-١٠٥})$$

فالمعادلة (١- ١٠٥) تفضي الى الحل العام (١- ١٠٤)، ولكن هنا ر = ٢، عندما t=c فيكون $\text{ح} = \text{٢ هـ}^{\pi\sqrt{\text{٨}}}$

فالمسار اللولبي الذي تسلكه المدمره هو:

$$\text{ر} = \text{٢ هـ}^{(\theta-\pi)/\sqrt{\text{٨}}}$$

وبالطبع يستطيع قائد الغواصة ان يتحاشى اكتشاف امره بالتباطؤ ويسير في مسار منحني.





التمارين (١-٩)

١. في مثال (٢) افرض ان ع = غ واثبت ان

$$ص = \frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٢}\left[\left(\frac{س}{م}\right)^{٢} - ١\right] - \text{لي}\,\frac{س}{م}\right]$$

وهكذا فلن يلحق الصقر الحمامة. وباستعمال (١- ٩٧)، (١- ١٠١) بيّن انه عندما يكون الصقر في (س، ص) تكون المسافة بين الصقر والحمامة هي (س^{٢} + م^{٢} ٢/ ٢أ).

وهكذا فلن يكون الصقر أقرب الى الحمامة من م/ ٢

٢. اثبت ان ع > غ (في المثال (٢)) ثم اثبت ان:

$$ص = \frac{١}{٢}\left[\frac{(س/م)^{١+ع/غ^{-١}}}{١+ع/غ} + \frac{(م/س)^{ع/غ^{-١}} - ١}{(ع/غ) - ١}\right]$$

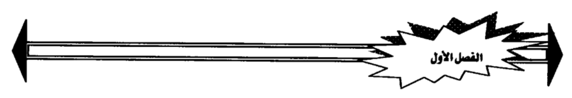
وهكذا فالصقر لن يلحق بالحمامة. أوجد بدلالة س المسافة بين الصقر والحمامة.

٣. اذا كان محور ص والخط س = ب ضفتي نهر يجري بسرعة ع (باتجاه ص السالب)، ووقف رجل عند نقطة الأصل ووقف كلبه عند النقط (ب، ٠) ثم نادى الرجل كلبه فخاض الكلب في النهر يسبح باتجاه صاحبه بسرعة ثابتة غ (> ع) فماذا يكون مسار الكلب؟

٤. أين يصل الكلب في التمرين ٣ الى البر اذا كان ع = غ؟

٥. بين أن الكلب في التمرين ٣ لن يصل الى البر اذا كان غ > ع.





افرض أن الرجل اخذ يمشي باتجاه سير النهر في اللحظة التي نادى فيها كلبه، وبسرعة ع فهل يستطيع الكلب الآن أن يصل الى البر؟

٦. في المثال (٢) إفرض ان المدمرة اتجهت نحو النقطة التي كانت فيها الغواصة، ثم دارت ٩٠° الى اليسار وقعطت ميلين قبل أن تبدأ سيرها اللولبي، فما معادلة المسار الذي يجب أن تسلكه الآن؟

٧. إفرض ان المدمرة في المثال (٢) تسير بمثلي سرعة الغواصة وان الغواصة اكتشفت عندما كانت على بعد ٣ أميال عن المدمرة. أوجد مساراً يضمن أن تمر المدمرة فوق الغواصة على فرض أنهما يسيران على نفس المبدأ المبين في المثال المذكور.

٨. ثلاث زواحف على أركان مثلث متساوي الأضلاع خلفه م، بدأت تتحرك بسرعة واحدة، كل نحو التي الى يمينها، اجعل مركز المثلث عند نقطة الأصل واحد رؤوسه على محور س الموجب. أوجد مسار الزاحفة التي بدأت من محور س.

٩. حل هذا التمرين اذا كانت الزواحف أربعاً على رؤوس مربع [٠، م] × [٠، م] كم تقطع الزواحف قبل ان تلتقي؟

(١-١٠) التحليل، الحجرات (Compart ments)

كثيراً ما تكون العملية الفيزيائية او البيولوجية من التعقيد بحيث تقسم الى عدة مراحل متميزة وعندها يمكن أن توصف العملية كلها عن طريق وصف التداخل بين هذه المراحل. فكل مرحلة من هذه المراحل نسميها حجرة، ومحتويات كل حجرة تعتبر ممتزجة تمام الامتزاج. فإذا انتقل شيء من حجرة الى



اخرى يستوعب فيها فوراً. وعلى هذا نسمي العملية كلها منظومة حجرات. فالمنظومة المفتوحة هي التي يمكن ان تعطي أو تأخذ عن طريق واحدة أو أكثر من الحجرات، فإن لم يتوافر ذلك تعد المنظومة مغلقة .

وفي هذا البند ندرس أبسط هذه المنظومات وهي منظومة الحجرة الواحدة. اما المنظومات الاكثر تعقيداً فنجد شيئاً عنها في الفصول القادمة.

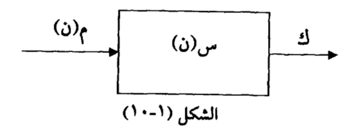
وبشكل (١- ١٠) يمثل منظومة ذات حجرة واحدة تحتوي على كمية س (ن) من المادة. وهناك وارد يرد اليها بسرعة م (ن). اما ك فهو معامل تحويل كسري بين الجزء من المادة الذي يصدر عنها في وحدة الزمن. ومن الواضح ان السرعة التي بها تتغير الكمية س تعتمد على الفرق بين الوارد والصادر في أي لحظة ن وهذا يفضي الى معادلة التفاضلية.

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{ع}(\text{ن}) - \text{ك س}(\text{ن}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (١\text{-}١٠٦)$$

وكما رأينا في البند (١-٣) فان حل هذه المعادلة هو

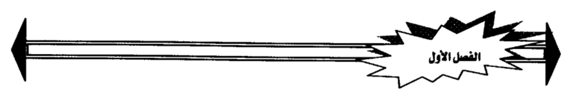
$$\text{س}(\text{ن}) = \text{هـ}^{-\text{ك ن}} \left\{ \int \text{ع}(\text{ن})\, \text{هـ}^{\text{ك ن}}\, \text{د ن} + \text{حـ} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (١\text{-}١٠٧).$$

وهذا النموذج البسيط ينطبق على كثير من المسأل كما سنرى.



الشكل (١-١٠)





المثال (١):

نصف عمر مادة السترنتيوم (Srqo) go خمسة وعشرون سنة. فاذا وضعنا ١٠ غرامات من هذه المادة في وعاء مختوم، فكم غراماً يبقى منها بعد عشر سنوات؟

ليكن س (ن) عدد غرامات المادة في السنة ن. فلان عدد الذرات كبير جدا فان العدد الذي يتلاش في وحدة الزمن يتناسب مع العدد في ذلك الزمن. وثابت التناسب ك هو معامل التحول الكسري.

ولانه ليس هنالك وارد، تصبح المعادلة

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -\text{ك س(ن)} \qquad \text{.................................(١-١٠٨)}$$

وحل هذه المعادلة هو س (ن) = س. $\text{هـ}^{-\text{ك ن}}$، حيث س. = ١٠ غرامات.
فلا يجاد ك نضع

ن= ٢٥ فينتج

$$\text{٥} = \text{١٠ هـ}^{-\text{٢٥ن}}$$

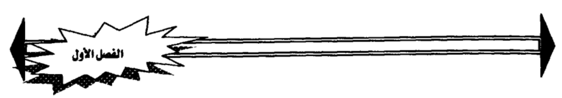
ومن ذلك ينتج بعد أخذ اللوغرثمات ان ك = (لي ٢) / ٢٥ ن فيكون

$$\text{س(١٠)} = \text{١٠ هـ}^{-(\text{١٠ لي٢})\text{٢٥}} = \text{١٠ (٢)}^{-\text{٢/٥}} \approx \text{٧,٥٧٨ غ.}$$

المثال (٢):

صهريج فيه ١٠٠غالون من الماء اذيب فيها ٥٠ باوند من الملح. ويصب في الصهريج في كل دقيقة ٢ غالون من محلول يحتوي الغالون منه على باون





واحد من الملح، فيمتزج المحلول بماء الصهريج في الحال نظراً لتحريكها بسرعة كبيرة، ويخرج المزيج من الصهريج بسرعة ٢ غالون في الدقيقة. أوجد كمية الملح في الصهريج في أي لحظة ن.

لتكن س (ن) هي كمية الملح في الباون بعد ن دقائق. فلان كل غالون من المحلول يصب في الصهريج يحتوي على باوند واحد من الملح، يكون ع (ن)= ٢.

ومن ناحية اخرى: ك = $\frac{٢}{١٠٠}$س لان ٢غالون من مئة تخرج كل دقيقة فتكون المعادلة (١- ١٠٦) كما يلي:

$$\frac{د س}{د ن} = ٢ - \frac{٢}{١٠٠} س$$

وحلها:

س (ن) = هـ$^{-ن/٥٠}$ { أ هـ ن$^{/٥٠}$ دن + حـ }.

= ١٠٠+ حـ هـ$^{-ن/٥٠}$

فعند ن =. يكون ٥٠ = س (٠) = ١٠٠ + حـ

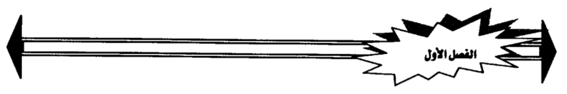
فيكون.

س (ن) = ١٠٠- ٥٠ هـ$^{-ن/٥٠}$

لاحظ ان س تتزايد مع الزمن وتقارب نسبة الملح الى الماء في المحلول الذي يصيب في الصهريج.

والمعامل الكسري ك قد يكون متغيرا كما سنرى في المثال التالي.





المثال (٣):

في المثال (٢) افرض ان ٣ غالون من المحلول يحتوي كل منها على باوند واحد من الملح في الصهريج كل دقيقة وان كل عناصر المسألة الاخرى بقيت على حالها. فهنا م (ن) = ٣، ولان كمية الملح في الصهريج تتزايد مع الوقت فالجزء الذي يحول هو ك = ٢/ (١٠٠+ ن). بسط هذا الكسر هو عدد الغالونات التي تخرج. والمقام (١٠٠+ن) هو عدد الغالونات في الصهريج في الزمن ك. والمعادلة التي تصف هذه المنظومة هي:

$$\frac{د\,س}{د\,ن} = ٣ - \frac{٢س}{١٠٠+ن} \quad ....(١-١٠٩)$$

وباستخدام المعادلة (١ – ١٠٧) نجد ان حل (١-١٠٩) هو:

$$س\,(ن) = سا\,(-\int \left(\frac{٢\,د\,ن}{١٠٠+ن}\right)\left[\int ٣ سا \left(\int \frac{٢د\,ن}{١٠٠+ن}\right) د\,ن + ح\right]$$

= (١٠٠+ ن) + حـ (١٠٠+ ن)$^{-٢}$. فنضع ن = ٠، ونجد ان حـ = -٥٠ (١٠٠)^{٢}، فيكون:

$$س\,(ن) = ١٠٠ + ن - ٥٠\,(١+ ن / ١٠٠)^{-٢}$$

وبعد ١٠٠دقيقة يكون س (١٠٠) = ٢٠٠ – ٥٠ / ٤ = ١٨٧,٥ باوند. من الملح في الصهريج.

وقد يعتمد الوارد م (ن) على الكمية الموجودة بالاضافة الى اعتماده على الزمن. ففي امثلة سابقة يعتمد الوارد على الكمية المتوافرة وأمثلة أخرى يعتمد معامل التحويل الكسري أيضاً على الكمية المتوافرة، ففيه ك = cع



وفي العمليات البيولوجية نقابل منظومات فيها الوارد معـاملات التحويـل الكسرية دورية نظرا لناهية نشاطها. فمثلا افراز الغدد النخامية الامامية لهرمـون (ACTH) المنشط لقشرة الغدة.

النظرية يمضي في دورة مدتها اربع وعشرون ساعة فيها حـ تجرف افرازات الادرينالين على نحو يجعل مستواها في بلازما الدم أعلى ما يمكن حوالي الـساعة ٨ صباحا واقل مايمكن حوالي ٨ مساء.

المثال (٤):

في (١- ١٠٦) لـيكن ك (ن) = ﻡ + ب جـا W ن، حيـث أ > ب. فهـذا يفضي الى المعادلة

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{م (ن)} - (\text{ﻡ} + \text{ب جا } W \text{ ن) س} \qquad (\text{١-١١٠})$$

فلأن $\int (\text{ﻡ} + \text{ب جا } W\text{ن) د ن} = \text{ﻡ ن} - \frac{-\text{ب}}{W} \text{جتا } w \text{ ن} + \text{جـ}$،

يمكن ان نضرب عامل التكامل سـا [أن+ (ب/ W) (١- جتا W ن] في طرفي (١-١١٠) فينتج:

$$\frac{\text{د}}{\text{د ن}} \left(\text{هـ}^{\text{ﻡن} + (\text{ب}/W)(\text{١- جتا} W \text{ن})} \text{ س}^{(\text{ن})} \right) =$$

$$\text{هـ}^{\text{ﻡن} + (\text{ب}/W)(\text{١- جتا} W\text{ن})} \{ \text{س}' + (\text{أ} + \text{ب جا } W\text{ن) س} \}$$

$$= \text{زهـ}^{\text{ﻡن} + (\text{ب}/W)(\text{١-جتا} W\text{ن})} \text{ م (ن)} \qquad (\text{١-١١١}).$$

فنكامل من طرفي (١ -١١١) من ٠ الى ن فينتج:

$\text{هـ}^{\text{أن}+(\text{ب}/W)(1-\text{جتا}W\text{ن})}\Big|$ س (ن)   ن = $\int^{\text{ن}}$ م (ن) $\text{هـ}^{\text{أن}+(\text{ب}/W)(1-\text{جتا}W\text{ن})}$ د ن

أي أن

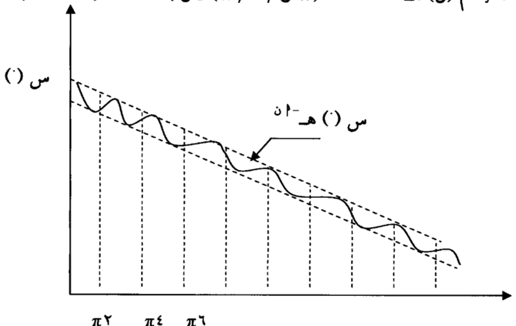
س (ن) = $\text{هـ}^{\text{أن}+(\text{ب}/W)(1-\text{جتا}W\text{ن})}$ [س (٠)]

+ $\int^{\text{ن}}$ م (ن) $\text{هـ}^{\text{أن}+(\text{ب}/W)(1-\text{جتا}W\text{ن})}$ د ن.................... (١- ١١٢)

ولأن ١ – جتا w ن = ٢ جا^{2} (w ن / ٢) نكتب (١- ١٢) بالصيغة:

س (ن) = $\text{هـ}^{-\text{أن}-2\text{ب جا}^{2}(w\text{ن}/2)w}$

+ $\int^{\text{ن}}$ م (ن) $\text{هـ}^{\text{أن}+2\text{ب جا}^{2}}$ (w ن / ٢/w) د ن).........(١- ١١٣)



(الشكل ١ -١١)

فإذا كان م (ن) = ٠، فإن س (ن) يسلك المسلك المبين بالشكل (١- ١١)، حيث س (٠) هـ$^{-ا ن}$ هي حاصرة عليا والعامل سا [- ٢ جا^{٢} (w ن/ ٢) / w] يتراوح بين ساعة (-٢ب/ w) والواحد.

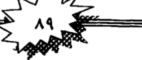
التمارين (١- ١٠)

١. للكربون (C^{14}) ١٤ نصف عمر مقداره ٥٧٠٠ سنة وهو ينتشر في الجو بانتظام على شكل ثاني أكسيد الكربون فالنباتات الحية تمتص ثاني أكسيد الكربون وتحافظ على نسبة معينة من C^{14} بالنسبة إلى العنصر الثابت C^{12} فإذا ماتت يتحلل C^{14} فتحتل هذه النسبة. قارن بين تركيز C^{14} في قطعتين متماثلتين من الخشب، احداهما قطعت حديثاً والأخرى عمرها ٢٠٠٠ سنة.

٢. كثيراً ما يستعمل اليود المشع I^{131} في الطب للكشف ١٠ افرض ان جرعة معينة ج منه قد حقنت في مجرى الدم في اللحظة ن = ٠ وانها قد انتشرت بانتظام في الدم قبل أن تحدث أي خسارة فإذا كانت نسبة ما يفرز من اليود عن طريق الكلية د١ في المئة، وعن طريق الغد الدرقية ر١ في المئة، فأي نسبة من الجرعة الأصلية تبقى في الدم بعد يوم واحد.

٣. افرض أن شخصاً مصاباً جاء إلى المجتمع الذي عدد أفراده ع، كلهم معرضون للإصابة فإذا اعتبرنا أن سرعة العدوى تناسب مع حاصل ضرب عدد المصابين في عدد المعرضين للإصابة من الموجودين فكم يكون عدد المصابين في أي لحظة ن؟ لتكن نسبة الأصابة النوعية ك.

٤. صهريج كان في البدء يحتوي على التر من الماء النقي. ولكن أخذ ينصب





في محلول بسرعة ٤ لترات في الدقيقة، وكان المحلول يحتوي على ٢٠ غم من الملح في كل لتر، وكان المزيج يختلط فوراً بسبب الرّج المتواصل فإذا كان الصهريج يتسرب منه المزيج بنفس السرعة التي يدخل بها المحلول، فمتى تصبح كمية الملح في الصهريج كيلو غراماً واحداً؟

٥. في التمرين ٤ كم يمضي من الزمن حتى ترتفع كمية في الصهريج من كيلو غراماً واحد الى كيلو غرام ونصف؟

٦. صهريج فيه ١٠٠ غالون من الماء الصافي، أخذ يجري محلول يحتوي على ٢ باوند من الملح في كل غالون، بسرعة ٤ غالون في الدقيقة، وكان المزيج ينتظم فوراً بالرّج، فإذا كان المزيج ينصب من الصهريج بسرعة ٥ غالون في الدقيقة، فأوجد:

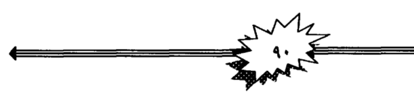
أ) كمية الملح في الصهريج عندما يبلغ ما فيه ١٢٠ غالون.

ب) مقدار تركيز الملح في الصهريج بعد ٢٠ دقيقة.

٧. صهريج فيه ٥٠٠ غالون من المحلول، أخذ ينصب فيه بسرعة ٥ غالون في الدقيقة آخر نسبة الملح فيه ٢ باوند لكل غالونن فيتوزع الخليط بانتظام، وينسكب من الصهريج بسرعة ١٠ غالون في الدقيقة، فإذا كان الملح يصل إلى قيمته القصوى في الصهريج بعد ٢٠ دقيقة فكم كانت كمية الملح فيه في البدء؟

٩. افراز الفوسفات يبلغ أدنى مستوى له عند السادسة صباحاً ويصل الى اعلى مستوى عند السادسة مساء، فإذا كانت سرعة الافراز.

$$\frac{١}{٦} + \frac{١}{٣} \text{ جتا} \frac{\pi}{٢}(\text{ن} - ٦)$$



غرامات في اللحظة ن (٠ ≥ ن ≥ ٢٤) وكان الجسم يحتوي على ٤٠٠ غرام من الفوسفات. فكم تكون نسبة الفوسفات في جسم مريض في الزمن ن علماً بأن هذا المريض لا يشرب إلا الماء.

١٠. في التمرين ٩ إذا سمح للمريض بتناول ثلاث وجبات يومياً حيث يأخذ جسمه الفوسفات بالسرعة ع (ن) على النحو التالي:

ع (ن) = $\frac{١}{٣}$ غ / الساعة، ٨ ≥ ن ≥ ١٦

٠غ / الساعة، فيما عدا ذلك

فأوجد قانوناً بين كمية الفوسفات في جسم المريض في الزمن ن. حتى يبلغ اقصى حد له؟

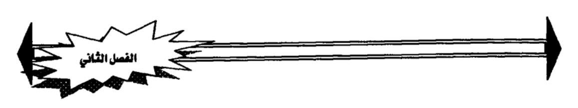
١١. لدينا منظومة ذات حجره واحدة فيها ك ثابت

م (ن) = ا + ب جا W ن، ا> ب

أوجد حلاً لهذه المنظومة كيف تختلف هذه المنظومة فيها الوارد ثابت ومعامل التحويل الكسري دوري؟ [انظر المعادلة (١ – ١١٣)].



المحددات



الفصل الثاني

المحددات

(١- ٢) اقتران المحدد:

تعريف (١- ٢): لتكن م هي مجموعة المصفوفات المتكونة من الاعداد الحقيقية فإن الاقتران المعرف على النحو التالي: د: م ← ح

يسمى الاقتران د بمحدد المصفوف المربعة أ وسنرمز للمحدد بالرمز محدد أ أو | أ |

كما يمكن التعبير عنها بالصيغة Δ (أ)

(٢- ٢) حساب المحدد للمصفوفة المربعة

١) إن محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الأولى على الصورة

$$أ = [\ م\ ] \Leftarrow |أ| = م$$

$$أ = \begin{bmatrix} م & ب \\ ج & د \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = م\ د - ب$$

٢) إن محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية والتي هي على الصورة وهو عبارة عن الفرق بين حاصل ضرب عناصر القطر الأول بحاصل القطر الثاني.

مثال (١-٢): اوجد محدد المصفوفة أ = | ٥ |

الحل: | أ | = ٥

مثال (٢- ٢) = اوجد محدد المصفوفة أ= $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل: | م | = ١ × ٢ – ٢ × ٣ = ٢ – ٦ = - ٤

مثال (٣- ٢): أوجد محدد المصفوفة

م= $\begin{bmatrix} \text{جا س} & \text{جتا س} \\ \text{- جتا س} & \text{جا س} \end{bmatrix}$

الحل = | م | = جا س جا س – (- جتا س) جتا س = جا^٢ س + جتا^{٢}س = ١

مثال (٤ – ٢): أوجد محدد المصفوفة

| م | = $\begin{bmatrix} ١٠٠ & ١٠١ \\ ١٠٢ & ١٠٣ \end{bmatrix}$

فلاحظ أن عناصر المصفوفة المعطاه هي اعداد حقيقية متتالية وعليه فستفرض أن العدد م = ١٠٠ وعليه يمكن كتابة المصفوفة على النحو التالي:

| م | = $\begin{bmatrix} \text{م} & \text{م+١} \\ \text{م+٢} & \text{م+٣} \end{bmatrix}$ ⇐ | م | = م (م + ٣) – (م + ١) (م + ٢)

= م^٢ + ٣م - م^٢ – ٣ م – ٢ = - ٢

٣) المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة لتكن

م = $\begin{bmatrix} \text{م}_{١١} & \text{م}_{٢١} & \text{م}_{٣١} \\ \text{م}_{١٢} & \text{م}_{٢٢} & \text{م}_{٣٢} \\ \text{م}_{١٣} & \text{م}_{٢٣} & \text{م}_{٣٣} \end{bmatrix}$

ولإيجاد محدد مثل هذا النوع من المصفوفات سنعتمد طريقين هما:

أ) طريقة المصفوفة المصغرة والتي سترمز لها بالرمز $م_{ي ر}$ و الناتجة عن تغطية العمود (ر) والصف (ي) الذي يقع فيه العنصر $أ_{ي ر}$ نأخذ محدد المصفوفة المتبقية وكذلك سنرمز لعامل $أ_{ي ر}$ والذي يساوي

$$أ_{ي ر} = (-١)^{ي+ر} م_{ي ر} \text{ للعنصر } أ_{ي ر}$$

مثال (٥-٢): لدينا المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٣ & -١ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ١ & ٢ \end{bmatrix}$

والمطلوب إيجاد المصفوفة وكذلك العامل لكل من الحدود التالية $أ_{٢١}$، $أ_{٣٢}$، $أ_{١٣}$

الحل: نجد أولا المصفوفات المصغرة المرتبطة بكل حد من الحدود أعلاه ثم محددها وعواملها على النحو التالي:

$$م_{٢١} = \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ٤ & ٦ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix} = (٤)\cdot(٢) - (٦)\cdot(٧) = -٤٣$$

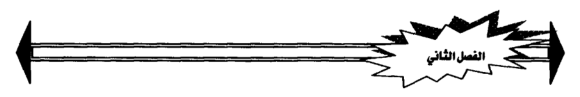
$$م_{٣٢} = \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} ٣ & -١ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix} = (٣)\cdot(١) - (-١)\cdot(٧) = ٣ + ٧ = ١٠$$

$$م_{١٣} = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}، \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix} = (-١)\cdot(٦) - (٢)\cdot(٥) = -٦ - ١٠ = -١٦$$

٥ ٦ ٥ ٦

أما عوامل الحدود المتكافئة فهي على النحو التالي:

$$أ_{٢١} = (-١)^{١+٢} م_{٢١} = (-١)(-٤٣) = ٤٣$$



أ٣٢ = (- ١) $^{٢+٣}$ م٣٢ = (- ١) (١٠) = - ١٠

م١٣ = (- ١) $^{٣+١}$ م١٣ = (١) ٠ (- ١٦) = - ١٦

تعريف (٢- ٢): إن محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثالثة والتي هي على النحو التالي:

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{bmatrix}$$

ويقال لمحدد المصفوفة

محدد أ = | أ | = أ ١١ أ١١ + أ ٢١ أ٢١ + أ ٣١ أ٣١

بأنه مفكوك بالنسبة للصف الاول وعلى أية حال فإنه إذا كان المحدد قد وجد من المفكوك حسب أي صف أو أي عمود فلا اختلاف في النتيجة. وبشكل عام فإن:

محدد أ = | أ | = أ ي١ أي١ + أ ي٢ أي٢ + أ ي٣ أي٣

محدد أ =| أ | = أ ١ر أ١ر + أ ٢ر أ٢ر + أ ٣ر أ٣ر

ملاحظة: لأي مصفوفة من الرتبة الثالثة فإن اشارة العوامل (العناصر المرافقة) عند حساب محددها سواء كان المفكوك حسب سطر معين او عمود معين يمكن الاستعانة بالجدول (١- ٢).

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

جدول (١- ٢)



مثال (٦-٢): احسب محدد المصفوفة. $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ٤ & ٥ & -٢ \end{bmatrix}$

الحل: سنحل المفكوك حسب الصف الثالث وسنستعين بجدول الاشارات (١- ٢) ليكون المحدد على النحو:

$$|أ| = (٤)\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix} - (٥)\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ -٢ & ١ \end{bmatrix} + (-٢)\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$= ٤ \, (٢ - ٩) - ٥ \, ((١) .(١) - (-٢) (٣)) - (-٢) ((١) . (٣) - (-٢) (٢))$$

$$= -٢٨ - ٣٥ - ١٤ = -٧٧.$$

مثال (٧- ٢): أوجد محدد المصفوفة

$$ب = \begin{bmatrix} ٧ & ٦ & ٠ \\ ٩ & -٣ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{bmatrix}$$

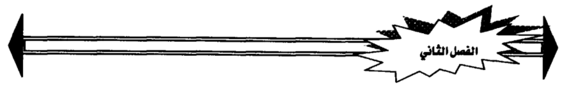
الحل: نحاول عند اختيار الصف أو العمود الذي سنأخذ المفكوك بالنسبة له بأن يحتوي على أكبر عدد من الأصفار وهنا سنأخذ العمود الثالث لاحتواه على صفرين مما يسهل العملية الحسابية وعليه فإن محدد المصفوفة ب

$$\text{محدد} (ب) = |ب| = (-٢) \begin{bmatrix} ٧ & ٦ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} = (-٢) ((٧)(٥) - (٤) (٦٠))$$

$$= (-٢) (٣٥ - ٢٤) = (-٢) (١١) = -٢٢$$

والآن نستطيع ان نعطي صورة أعم لهذه الطريقة وهي حساب محدد مصفوفة مربعة من الرتبة النونية فإذا كان لدينا المصفوفة:





$$أ = [أ_{ري}] = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{12} & \cdots & أ_{1ن} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ أ_{ن1} & أ_{ن2} & \cdots & أ_{نن} \end{bmatrix}$$

فإن محدد المصفوفة اذا كان المفكوك بالنسبة لأي سطر هو:

$$|أ| = أ_{ي1}\,أ_{ي1} + أ_{ي2}\,أ_{ي2} + \cdots\cdots + أ_{ين}\,أ_{ين}$$

أما اذا كان المفكوك بالنسبة لأي عمود فإن:

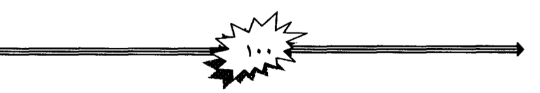
$$|أ| = أ_{1ر}\,أ_{1ر} + أ_{2ر}\,أ_{2ر} + \cdots\cdots + أ_{نر}\,أ_{نر}$$

مثال (٨- ٢): أوجد محدد المصفوفة

$$|أ| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل: نظرا لصعوبة الإجراءات الحسابية وخاصة كلما زادت الرتبة لذا نبدأ بالبحث عن الصف أو العمود الأكثر أصفار أو يعمل المكفوك على أساسه وفي مثالنا سنعمل المفكوك على أساس الصف الثالث على النحو التالي:

$$|أ| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^{3+1}.3.\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} + (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$



$$+ (-1)^{3+3} \cdot (0) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3\ (2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} +0 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +0+0-3(2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +0(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(\ 2(3+6) - 2\ (-9+8) + 0\ ) + 0 + 0 - 3\ (2(2+6) + 0 - 2(2+8)\ )$$

$$= 60 - 48 + 20 = 23$$

ب) قاعدة ساروس ك وهي طريقة اخرى لايجاد محدد المصفوفة أيا كانت رتبتها. وسنبدأ هذه الطريقة بالمصفوفة ذات الرتبة الثالثة. والتي هي على الصورة.

$$|\ أ\ | = \begin{bmatrix} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{bmatrix}$$

وحسب هذه القاعدة فاننا:

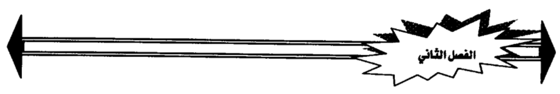
نضيف الى اسفل المحدد للمصفوفة الاصلية أو أول عمودين الى يمين محدد المصفوفة الاصلية.

نرسل اسهم تمر عبر العناصر القطرية من اقصى الزاوية اليسرى وهذه الاسهم تكون متوازية لناخذ حواصل الضرب للعناصر الواقعة على هذه الاسهم ونشير باشارة موجب (+) لكل نهاية سهم.

نرسل بالمثل أسهم من أقصى الزاوية اليمنى ونضع في نهاية كل سهم اشارة (-).

أ) نبدأ باضافة الصفوف ويكون محدد المصفوفة وعليه يكون محدد المصفوفة.





$$[أ] = أ_{11}\,أ_{22}\,أ_{33} + أ_{12}\,أ_{23}\,أ_{31} + أ_{13}\,أ_{21}\,أ_{13} - أ_{32}$$
$$أ_{23}\,أ_{11} - أ_{33}\,أ_{21}\,أ_{12}.$$

أما اذا أضيفت الاعمدة فيكون الشكل بعد الاضافة على نحو التالي :

$$\left[\begin{array}{ccc} أ_{11} & أ_{21} & أ_{31} \\ أ_{12} & أ_{22} & أ_{32} \\ أ_{13} & أ_{23} & أ_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \\ أ_{13} & أ_{23} \end{array}$$

$$[أ] = أ_{11}\,أ_{22}\,أ_{33} + أ_{21}\,أ_{32}\,أ_{13} + أ_{31}\,أ_{12}\,أ_{13} - أ_{31}\,أ_{22}$$
$$أ_{13} - أ_{11}\,أ_{32}\,أ_{23} - أ_{21}\,أ_{12}\,أ_{33}.$$

مثال (٩- ٢):

اذا كان لدينا المصفوفة أ = $\left[\begin{array}{ccc} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{array}\right]\begin{array}{cc} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{array}$ **فأوجد محدد هذه المصفوفة**

بطريقة ساروس بإضافة الأعمدة.

الحل:

$$|أ| = \left[\begin{array}{ccc} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{array}\right]\begin{array}{cc} ١ & ٢ \\ ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{array} = (٦+١٨+٢) - (٩+٣+٨) = ٢٦ - ٢٠ = ٦$$

مثال (١٠ – ٢):

اذا كانت المصفوفة ب = $\left[\begin{array}{ccc} ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \end{array}\right]$ أوجد محدد المصفوفة:

الحل: يترك للقارئ كتمرين:



(٣- ٢) خصائص المحددات

١) اذا كانت لدينا مصفوفة مربعة أ من الرتبة ن فإن | أ | = | أ^{ت} |

مثال (١١- ٢): اذا كان أ= $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ اثبت أن | أ | = | أ^{ت} | ٢-٣

الحل:

اذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ فإن | أ | = ١ (- ١) - ٢ (٣) = - ٧

| أ | = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{bmatrix}$ ⇐ أت = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$ ⇐ أ^{ت} = ١ (- ١) - ٢ (٣) = - ٧

نلاحظ من أعلاه أن | أ | = | أ^{ت} | وهو المطلوب.

٢) اذا كان أحد صفوف مصفوفة مربعة أو أحد اعمدتها صفرا فإن محدد هذه المصفوفة صفرا.

مثال (١٢- ٢): لدينا المصفوفة | أ | = $\begin{bmatrix} ١٧ & ٣٣ & -١٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٨٠ & -١٠ & ٤١ \end{bmatrix}$

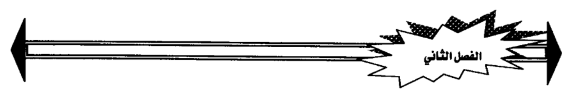
اثبت أن| أ | = ٠

الحل:

| أ | = (٠)$\begin{bmatrix} ٣٣ & -١٢ \\ -١٠ & ٤١ \end{bmatrix}$+(٠)٠$\begin{bmatrix} ١٧ & -١٢ \\ ٨٠ & ٤٠ \end{bmatrix}$+(٠)٠$\begin{bmatrix} ١٧ & ٣٣ \\ ٨٠ & -١٠ \end{bmatrix}$ =٠

وهو المطلوب





٣) اذا استبدل صفر بصف آخر أو عمود بعمود آخر أعمدة مصفوفة مربعة فإن محدد المصفوفة الناتجة بعد عملية الاستبدال مساوية لمحدد المصفوفة الأصلية عددياً ومخالف له بالإشارة:

مثال (١٣– ٢)

اذا كان | أ | = $\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ أثبت أن | أ | = - | ب |

حيث ب هي المصفوفة بعد تبديل صفان أو عمودان لمواقعهما

الحل: نجد أولاً | أ | ثم | ب | على النحو:

$$| أ | = \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = ٢ (٤) – ٣ (- ١) = ٨+٣=١١$$

$$| ب | = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١- & ٢ \end{bmatrix} = - ٣ – ٨ = - ١١$$

نلاحظ أعلاه أن | أ | = - | ب | وهو المطلوب

٤) في أي مصفوفة مربعة إذا كان بها صفان أو عمودان متشابهان فإن محدد المصفوفة المربعة يساوي صفراً.

مثال (١٤– ٢)

اذا كان أ = $\begin{bmatrix} ب & م \\ ب & م \end{bmatrix}$ فإن | أ | = م ب – م ب = ٠

٥) اذا كان لدينا مصفوفة مربعة وضرب صفوف أو أعمدة هذه المصفوفة في عدد ك ∍ ح فإن محدد المصفوفة بعد عملية الضرب يساوي محدد المصفوفة الاصلية مضروبا في العدد.



مثال (١٥– ٢):

اذا كان $|أ| = \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$ أثبت أن $= \begin{bmatrix} كأ & كب \\ ج & د \end{bmatrix} = ك \begin{bmatrix} أ & ب \\ ج & د \end{bmatrix}$

الحل: الطرف الأيسر ك أ (د) – حـ (ك ب) = ك أ د – حـ ك ب

ك (أ د – حـ د) = ك أ د – ك حـ ب

نلاحظ أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

٦) اذا كان هناك نسبة ثابتة بين صفي مصفوفة مربعة أو عمودي المصفوفة فإن محدد هذه المصفوفة صفرا وبشكل عام اذا كان لدينا المصفوفة

$$|أ| = \begin{bmatrix} أ & ب \\ كأ & كب \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن هناك نسبة ثابتة بين عناصر الصفين $\frac{أ}{كأ} = \frac{ب}{كب} = \frac{1}{ك}$

ولاثبات هذه الخاصية نأخذ محدد المصفوفة أ أي:

$$|أ| = \begin{bmatrix} أ & ب \\ كأ & كب \end{bmatrix} \Leftarrow |أ| = أ ك ط - أ ك ط = 0$$

مثال (١٦– ٢): أوجد محدد المصفوفة $أ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

الحل:

لو نظرنا الى العمود الأول والعمود الثالث لاحظنا أن هناك نسبة ثابتة بين عناصر العمود الأول وعناصر العمود الثالث على النحو $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$





وحسب الخاصية فإن محدد المصفوفة أ هو الصفر.

٧) اذا كان لدينا المصفوفتين أ، ب من الرتبة ن فإن:

| أ ب | = | أ |.| ب |، | أ^ن | = | أ |^ن

مثال (١٧- ٢): لدينا المصفوفتين

أثبت صحة العلاقة أعلاه

أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$

الحل:

| أ | = ٤ – ٦ = - ٢ ، | ب | = ٤+ ١= ٥ ، | أ |. | ب | = (- ٢) (٥)= - ١٠....(١)

(أ) – (ب) = $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ \\ ١٠ & ٥ \end{bmatrix}$، | أ. ب | = ٢٠ – ٣٠ = - ١٠........(٢)

نلاحظ من (١) و (٢) أن | أ. ب | = | أ |. | ب |

وكذلك | أ^٣ | = (| أ |^٣) = (- ٢)^٣ = - ٨

٨) في محددة مصفوفة أ اذا كان كان أي عناصر من عناصر صف أ وعمود مكون من مجموع عددين فإن محددة هذه المصفوفة تكون عبارة عن مجموع من نفس الرتبة وبصيغة الرموز.

$\begin{vmatrix} أ_١+أ_٢ & ب_١+ب_٢ \\ ح & د \end{vmatrix}$=(أ١ + أ٢) د – (ب١ + ب٢) حـ



= (أ₁ د - ب₁ حـ) + (أ₂ د – ب حـ)

$$\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ ح & د \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أ_2 & ب_2 \\ ح & د \end{vmatrix}$$

مثال (١٨ـ٢):

لدينا $\begin{vmatrix} ١٢ & ص & ٥ \\ ٣ & ١- & ١ \\ ٦- & ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ = ٠ المطلوب هو إيجاد قيمة ص

الحل:

سبق وان تناولنا خاصية وهي أنه إذا كان بين عمودين في مصفوفة مربعة تناسباً ثابتاً بين العمودين فإن محدد المصفوفة صفراً أو بالاستفادة من هذه الخاصية فإننا نضع هذا التناسب بين العمود الأول والثاني

$$\frac{ص}{١٢} = \frac{١-}{٣} = \frac{٢}{٦-} \Leftarrow \frac{ص}{١٢} = \frac{١-}{٣} \Leftarrow ٣ص = -١٢ \Leftarrow ص = -٤$$

مثال (١٩ـ٢):

لدينا $\begin{vmatrix} جتا\frac{س}{٢} & جا\frac{س}{٢} \\ جا س & ص سَ \end{vmatrix} = \frac{١-}{٢}$ أوجد اصغر قيمة للزاوية س

الحل:

نبدأ بإيجاد محدد المصفوفة ومساواته بالقيمة – ٥, ٠ على النحو :

$$جتا س\ جتا\frac{س}{٢} - جا س\ جا\frac{س}{٢} = \frac{١-}{٢} \Leftarrow جتا\left(س + \frac{س}{٢}\right) = \frac{١-}{٢}$$



$= \text{جتا } ١٢٠ \Leftarrow \frac{١٢٠}{١} = \frac{٣\text{س}}{٢} \Leftarrow ٣\text{س} = ٢٤٠ \Leftarrow \text{س} = ٨٠$

مثال (٢٠– ٢) اذا كان أ = $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ **احسب:** $|\,\text{أ}^{٦}\,|$

$$\text{أ}^{٢} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = -5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل: نعلم أن أ. أأ^{٢} وعليه فإن:

$$|\,\text{أ}^{٦}\,| = |\,(\text{أ}^{٢})^{٣}\,| = |\,\text{أ}^{٦}\,| = (-٥)^{٦} = ٥^{٦}$$

مثال (٢١- ٢): أوجد $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ح} \end{vmatrix}$

الحل:

قبل إجراء عملية المفكوك لايجاد المحدد نعمل على تبسيط المصفوفة وذلك بطرح الصف الاول من الصف الثاني ومرة من الصف الثالث لتصبح المحددة على نحو التالي:

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ح} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ 0 & \text{ب}-\text{أ} & \text{ب}-\text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب}-\text{أ} & \text{ح}-\text{أ} \end{vmatrix}$$ ونأخذ المفكوك حسب العمود الاول.

$$\text{أ} \begin{vmatrix} \text{ب}-\text{أ} & \text{ب}-\text{أ} \\ \text{ب}-\text{أ} & \text{ح}-\text{أ} \end{vmatrix} = \text{أ}((\text{ب}-\text{أ})(\text{حـ}-\text{أ})\ (\text{ب}-\text{أ})(\text{ب}-\text{أ}) = \text{أ}$$

$(\text{ب}-\text{أ})\ (\text{حـ}-\text{ب})$.



مثال (٢٢-٢) لدينا المصفوفة:

أ = $\begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٠ \\ ١ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$ أوجد مرافق العنصر أ٢١ في المحدد | أ • أ |

الحل:

= $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}$ وعليه فإن أ • أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٠ \\ ١ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٥ & -٢ \\ ١ & ٢ & -١ \end{bmatrix}$

ومرافق العنصر أ٢١ من | أ• أ | ⇐ $(-١)^{٢+١} \begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & -١ \end{vmatrix}$ = - ١ (٢) = - ٢

مثال (٢٣-٢): أوجد محددة المصفوفة أ = $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٥ & ١ \\ ٠ & ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix}$

الحل:

نحاول أولا أن نبسط المصفوفة الى صورة البسط حتى نبسط العمليات الحسابية في ايجاد محدد المصفوفة وذلك بجمع الصف الاول مع الصف الثاني وكذلك الصف الاول مع الصف الثالث ثم بعد ذلك نأخذ المفكوك بالنسبة للعمود الرابع لنحصل على مايلي:

$| أ | = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ & ٥ & صفر \\ ٠ & ٥ & ٣ & ٠ \\ ٦ & ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = (-١)(-١)(-١)^{٤+١} \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$

ثم نعمل على تبسيط المصفوفة الاخيرة لايجاد محددها وذلك بضرب الصف الاول في - ٢ وإضافته الى الصف الثالث لتصبح المصفوفة على النحو:

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٥ & ٣ \\ ٠ & -٣ & -٨ \end{vmatrix} = ٣\,(-١)^{١+١} \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ -٣ & -٨ \end{vmatrix} = ٣\,(-٤٠ + ٩) = -٩٣$$

أوجد مجموعة الحل للمعادلة.

$$\begin{vmatrix} س^{٢} & س & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

الحل:

نبدأ بعملية التبسيط قبل ايجاد محدد المصفوفة وذلك بطرح الصف الثالث من الصف الاول وكذلك بطرح الصف الثالث من الصف الثاني ثم نقوم بعمل المفكوك وفق العمود الثالث لنحصل على التالي:

$$|أ| = \begin{vmatrix} س^{٢} & س & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢}-٩ & س+٣ & ٠ \\ ٤-٩ & ٣+٣ & ٠ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س^{٢}-٩ & س+٣ & ٠ \\ -٥ & ٥ & ٠ \\ ٩ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ١\,(-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} س^{٢}-٩ & س+٣ \\ -٥ & ٥ \end{vmatrix} = ٠ \Leftarrow ٥\,(س^{٢} - ٩) + ٥\,(س+٣)$$

$$= ٠ \Leftarrow س^{٢} - ٩ + س + ٣ = ٠ \Leftarrow س^{٢} + س - ٦ = ٠ \Leftarrow (س + ٣)\,(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س+٣ = ٠،\ س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = -٣،\ س = ٢$$

{- ٢، ٣}

مثال (٢٤-٢): أوجد محدد المصفوفة.

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{ح} \\ \text{أ}^{٣} & \text{ب}^{٣} & \text{ح}^{٣} \end{vmatrix}$$

الحل:

نعمل على تبسيط المصفوفة المربعة حتى يسهل أخذ المحدد وذلك بطرح العمود الاول من العمود الثاني وكذلك العمود الاول من العمود الثالث نحصل على المصفوفة ثم ناخذ المفكوك بالنسبة للصف الاول على النحو التالي:

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & \cdot & \cdot \\ \text{أ} & \text{ب} - \text{أ} & \text{ح} - \text{أ} \\ \text{أ}^{٣} & \text{ب}^{٣} - \text{أ}^{٣} & \text{ح}^{٣} - \text{أ}^{٣} \end{vmatrix} = (-١)^{١+١} \begin{vmatrix} \text{ب} - \text{أ} & \text{ح} - \text{أ} \\ \text{ب}^{٣} - \text{أ}^{٣} & \text{ح}^{٣} - \text{أ}^{٣} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{ح}^{٣} - \text{أ}^{٣}) - (\text{ح} - \text{أ})(\text{ب}^{٣} - \text{أ}^{٣})$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{ح} - \text{أ})(\text{ح}^{٢} + \text{أح} + \text{أ}^{٢}) - (\text{ح} - \text{أ})(\text{ب} - \text{أ})(\text{ب}^{٢} + \text{أ ب} + \text{أ}^{٢})$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{ح} - \text{أ})(\text{ح}^{٢} + \text{أ ح} + \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} - \text{أ ب} - \text{أ}^{٢})$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{ح} - \text{أ})\,[\,(\text{ح}^{٢} - \text{ب}^{٢}) + \text{أ}(\text{ح} - \text{ب})\,]$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{ح} - \text{أ})\,[\,(\text{ح} - \text{ب})(\text{ح} + \text{ب}) + \text{أ}\,(\text{ج} - \text{ب})\,]$$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{ح} - \text{أ})(\text{ح} - \text{ب})(\text{ح} + \text{ب} + \text{أ})$$

مثال (٢٥-٢) إذا كانت

$$|\text{ب}| \begin{vmatrix} \text{جا س} & \text{جتا س} \\ \text{جا س} & \text{جتا س} \end{vmatrix} ، \; |\text{أ}| \begin{vmatrix} \text{جتا س} & \text{جا س} \\ \text{جا س} & \text{جتا س} \end{vmatrix}$$



أوجد: | أ. ب |

| ب | $= \begin{vmatrix} \text{جا س} & \text{جتا س} \\ \text{جا س} & \text{جتا س} \end{vmatrix}$ = جا س جتا س − (- جا س) جتا س

= جا س جتا س + جا س جتا س = ٢ جا س جتا س = جا ٢ س.

| أ | $= \begin{vmatrix} \text{جتا س} & \text{جا س} \\ \text{جا س} & \text{جتا س} \end{vmatrix}$ = جتا^{٢} س = جتا ٢ س

| أ. ب | = | أ |. | ب | = جتا ٢ س جا ٢ س = $\frac{١}{٤}$ جا ٤ س

(٢-٤) المصفوفة المصاحبة (Adjoint Matrix)

تعريف (٣-٢): يقال للمصفوفة الناشئة من مدور مصفوفة المرافقات بالمصفوفة المصاحبة والتي سنرمز لها بالرمز (أ) Adj وعليه فإن (أ) Adj = (أ$_{ر}$)^{ت} $_{ن \times ن}$.

ولتوضيح هذا المفهوم نتاول المثال التالي:

مثال (٢٦-٢): أوجد المصفوفة المصاحبة للمصفوفة

| أ | $= \begin{vmatrix} ٣ & ٢- & ١ \\ ٥ & ٦ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٣- \end{vmatrix}$

الحل: نبدأ بإيجاد مرافق كل عنصر على النحو التالي:

أ$_{١١}$ = (- ١)$^{١+١}$ $\begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ٠ & ٣- \end{vmatrix}$ = (+٦) (- ٦) − ٠ = - ١٨

$$أ_{٢١} = (-١)^{٢+١} \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = -(-١٥ - ٢) = ١٧$$

$$أ_{٣١} = (-١)^{٣+١} \begin{vmatrix} ٥ & ٦ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = (٠ - ٦) = -٦$$

$$أ_{١٢} = (-١)^{١+٢} \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٠ & -٣ \end{vmatrix} = -(٦ - ٠) = -٦$$

$$أ_{٢٢} = (-١)^{٢+٢} \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = -٩ - ١ = -١٠$$

$$أ_{٣٢} = (-١)^{٣+٢} \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} = -(+٢) = -٢$$

$$أ_{١٣} = (-١)^{١+٣} \begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} = (-٤ - ٦) = -١٠$$

$$أ_{٢٣} = (-١)^{٢+٣} \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = -(٦ - ٥) = -١$$

$$أ_{٣٣} = (-١)^{٣+٣} \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix} = (١٨ + ١٠) = ٢٨$$

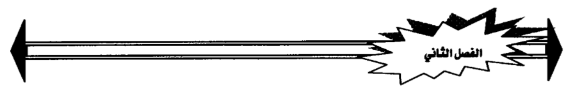
وعليه فإن مصفوفة المرافقات

$$| أ | \begin{vmatrix} -١٨ & ١٧ & -٦ \\ -٦ & -١٠ & -٢ \\ -١٠ & -١ & ٢٨ \end{vmatrix}$$

(٢-٥) نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب

نبدأ توضيح هذا المفهوم الهام في نظرية المصفوفات بالتعريف التالي:





تعريف (٤-٢):

لتكن لدينا أ مربعة من الرتبة ن و إذا وجد مصفوفة مربعة من الرتبة ن مثل ب وتحقق الشرط التالي أ. ب = ب. أ = $و_ن$

فإننا نسمي المصفوفة ب بأنها المصفوفة النظيرة بالنسبة لعملية الضرب وسنرمز لها أيضا بالرمز $أ^{-١}$

ملاحظة: حتى يكون للمصفوفة المربعة مصفوفة نظيرة بالنسبة لعملية الضرب فإنه يتوجب أن يكون محددها لا يساوي صفراً.

(١-٥-٢) خصائص المصفوفة النظيرة

١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن:

$أ . أ^{-١} = أ^{-١} . أ = و_ن$

٢) نظير المصفوفة النظيرة هي المصفوفة الأصلية

$(أ^{-١})^{-١} = أ$

٣) نظير مبدول المصفوفة = مبدول نظير المصفوفة

$(أ^{ت})^{-١} = (أ^{-١})^{ت}$

٤) إذا كان لدينا المصفوفتين المربعتين أ، ب من الرتبة ن فإن:

$(أ، ب)^{-١} = ب^{-١}، أ^{-١}$

٥) إذا كان لدينا أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن

$\forall$ جـ $\in$ ح $\Leftarrow$ $(جـ أ)^{-١} = \frac{١}{ج} . (أ)^{-١}$





٦) إذا كان لدينا أ مصفوفة مربعة فإن $(أ^{ن})^{-1} = (أ^{-1})^{ن}$

٧) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإن $|أ^{-1}| = \frac{1}{|أ|}$

مثال (٢٧– ٢): أوجد نظير المصفوفة المربعة الضربي $أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل: نفرض أن المصفوفة النظيرة بالنسبة لعملية الضرب

$$ب = \begin{bmatrix} م & ب \\ ح & د \end{bmatrix}$$

$$أ. ب \quad = ب أ = و_٢ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} م & ب \\ ح & د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{bmatrix} م+٢ح & ب+٢د \\ ٣م+٤ح & ٣ب+٤د \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$م = -٢،\ ب = ١،\ حـ = \frac{٣}{٢}،\ > = \frac{-١}{٢}$$

وبحيث تحقق الشرط الوارد في التعريف (١٠– ١) أي ومن تساوي المصفوفتين فإننا نكتب نظام المعادلات التالية:

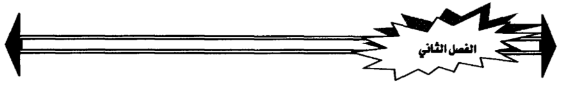
م + ٢ حـ = ب + ٢ د = ٠

٣ م + ٤ حـ = - ٠ ، ٣ب + ٤ د =٠

وبحل هذه الانظمة نجد أن:

وعليه فإن المصفوفة النظيرة للمصفوفة أ بالنسبة لعملية الضرب هي:

$$ب = أ^{-1} = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ \frac{٣}{٢} & \frac{-١}{٢} \end{bmatrix}$$



مثال (٢٨-٢):

أوجد المصفوفة النظيرة للمصفوفة أ بالنسبة لعملية الضرب، أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ -٢ & ٤ \end{bmatrix}$

الحل: نجد محدد المصفوفة أ على النحو:

| أ | = (٤) (١) – (- ٢) (- ٢) = ٤ – ٤ = ٠

ويكون محدد المصفوفة أ يساوي صفرا فإن هذه المصفوفة ليس لها مصفوفة نظيرة.

(٢ - ٥ - ٢) إيجاد المصفوفة النظيرة لأي مصفوفة باستخدام المصفوفة المصاحبة

قاعدة: إذا كان أ مصفوفة مربعة من الرتبة ن، ويكون

| أ | ≠ ٠ ⟸ أ د أ (adj = | أ | $و_ن$، أ ($\frac{١}{|أ|}$ adj) = ($\frac{١}{|أ|}$ (أ adj أ)

| أ | | أ |

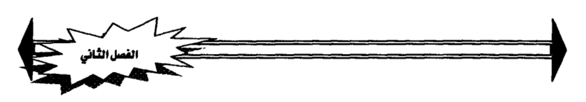
= $\frac{١}{|أ|}$ (| أ | $و_ن$) = $و_ن$ ⟸ $أ^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|}$ adj أ

ويمكن تلخيص القاعدة بالخطوات التالي:

١) نجد المحدد أ فإذا كان | أ | ≠ ٠ فإنها مصفوفة نظيرة.

٢) نجد مصفوفة المرافقات.





٣) نجد مبدول المرافقات لنحصل بمصفوفة المصاحبات التي سنرمز لها بالرمز adj أ.

٤) نجد المصفوفة النظيرة أ^{-1} من العلاقة.

$$|\text{أ}^{-1}| = \frac{1}{|\text{أ}|} \cdot \text{adj}\ \text{أ}\,|$$

مثال (٢٩-٢) على اعتبار أن $\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{م} & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ ، أ، ب ∈ ح - {٥}

أوجد نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الضرب

الحل: لتكن المصفوفة $\text{ب} = \begin{bmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ز} & \text{د} & \text{هـ} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ق} \end{bmatrix}$

هي المصفوفة النظيرة للمصفوفة أ. ومن كون أ. ب = ب. أ = و فإن

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{م} & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ز} & \text{د} & \text{هـ} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ق} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

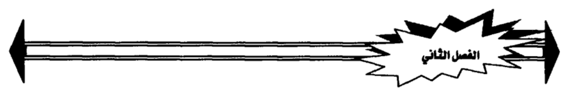
$$\Leftarrow \begin{bmatrix} \text{ع+مز+به} & \text{ص+مد+وب} & \text{س+مح+فب} \\ \text{ز+مه} & \text{د+مو} & \text{ح+مف} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ف} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين ⇐

س + م حـ+ ب ف + ١ ، ص + م د+ ب ، ع + م ز+ ب هـ=٠

و=٠





حـ+ أ ف = ، د+ أ و = ١ ، ز + أ هـ = ٠

ف = ٠ ، و = ٠ ، هـ = ١

بالتعويض عن هذه القيم في المعادلات أعلاه وبحل نظام المعادلات

س = ١، ص = ٠ م ، ص = م ^{٢} – ب ، حـ = ٠ ، د = ١

ز = - م ، ف = ٠ ، و = ٠ ، هـ = ١

وعليه فإن نظير المصفوفة أ الضربي هو:

$$ب = أ^{-١} = \begin{bmatrix} ١ & -م & م^{٢}-ب \\ ٠ & ١ & -م \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

ملاحظة: إذا كان لدينا مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

$$أ = \begin{bmatrix} م & ب \\ ج & د \end{bmatrix} ، |أ| = م د - ب جـ \neq ٠$$

$$فإن: أ^{-١} = \frac{\begin{bmatrix} د & -ب \\ -ج & م \end{bmatrix}}{م د - ب ج}$$

وهنا مصفوفة البسط ما هي الا المصفوفة المصاحبة والناتجة من تبديل مواقع عناصر القطر الأيسر (الرئيسي) مع تغير إشارة عناصر القطر الأيمن (القطر الثانوي).

مثال (٣٠-٢):

أوجد المصفوفة النظيرة لعملية الضرب للمصفوفة $أ = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{bmatrix}$

الحل: نجد أولا محدد المصفوفة أ

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٢- \\ ٣ & ١- \end{vmatrix} = (٢)(-١) - (٣)(-٢) = ٤$$

وباستخدام العلاقة أعلاه فإن:

$$أ^{-١} = \frac{[adj\ أ]}{|أ|} = \frac{\begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}}{٤} = \begin{bmatrix} \frac{١-}{٤} & \frac{٢}{٤} \\ \frac{٣-}{٤} & \frac{٢}{٤} \end{bmatrix}$$

مثال (٣١– ٢):

أوجد المصفوفة النظيرة بالنسبة عملية الضرب للمصفوفة أ

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ ٣ & ٣ & ١- \end{bmatrix}$$

الحل:

١) نجد محدد المصفوفة أ على النحو التالي:

$$أ = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٥ \\ ٣ & ٣ & ١- \end{vmatrix} = ١ \begin{bmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ١- \end{bmatrix} -٤ \begin{bmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣- & ١- \end{bmatrix} +٥ \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣- & ٣ \end{bmatrix} = ١$$

$$(-٢ - ١٥) - ٤(-٤ + ١٥) + (١٢ + ٦)$$

$$= -١٧ - ٤٤ + ٩٠ = ٢٩$$

٢) نجد مرافقات كل عناصر المصفوفة الأصلية

$$أ_{١١} = + \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ١- & ٣ \end{vmatrix} = + (- ٢ - ١٥) = - ١٧ \text{ ، } أ_{٢١} = - \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ١- & ٣- \end{vmatrix}$$

$$= - ٤ (- ٤ + ٥) = - ١١$$

$$أ_{٣١} = + \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٣- \end{vmatrix} = - (١٢ + ٦) = ١٨ \text{ ، } أ_{١٢} = - \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ١- & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= - (- ٤ - ٥) = ١٩$$

$$أ_{٢٢} = + \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ١- & ٣- \end{vmatrix} = + (- ١ + ١٥) = ١٤$$

$$أ_{٣٢} = - \begin{vmatrix} ٤ & ١+ \\ ٣ & ٣- \end{vmatrix} = - (٣+ ١٢) = - ١٥ \text{ ، } أ_{٢٣} = - \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} = -$$

$$(٥ - ٢٠) = (- ١٥) = ١٥$$

$$أ_{١٣} = + \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = + (٢٠ - ١٠) = ١٠ \text{ ، } أ_{٣٣} = + \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = +$$

$$(٣ - ١٦) = - ١٤$$

نكتب مصفوفة المرافقات

$$[\text{ أي ر }] = \begin{bmatrix} ١٨ & ١١- & ١٧- \\ ١٥- & ١٤ & ١٩ \\ ١٤- & ١٥ & ١٠ \end{bmatrix}$$

نجد المصفوفة المصاحبة

$$\text{adj } أ = [\text{ أي ر }]^{ت} = \begin{bmatrix} ١٠ & ١٩ & ١٧- \\ ١٥ & ١٤ & ١١- \\ ١٤- & ١٥- & ١٨ \end{bmatrix}$$

وعليه فإن المصفوفة النظيرة هي:

$$أ^{-١} = \frac{adj\,أ}{|أ|} = \frac{١}{٢٩} \cdot \begin{bmatrix} ١٠ & ١٩ & ١٧- \\ ١٥ & ١٤ & ١١- \\ ١٤- & ١٥- & ١٨ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١٠}{٢٩} & \frac{١٩}{٢٩} & \frac{١٧-}{٢٩} \\ \frac{١٥}{٢٩} & \frac{١٤}{٢٩} & \frac{١١-}{٢٩} \\ \frac{١٤-}{٢٩} & \frac{١٥-}{٢٩} & \frac{١٨}{٢٩} \end{bmatrix}$$

مثال (٣٢– ٢):

لدينا المصفوفتين $أ = \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}$، $ب = \begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ أوجد المصفوفة جـ بحيث ب = أهـ

الحل: نبدأ بوضع المعطيات $أ.\ هـ^{-١} = ب$

ثم نقوم بضرب كلا طرفي المعادلة بالمصفوفة النظيرة $أ^{-١}$

$$أ^{-١}\ (أ.\ هـ^{-١}) = أ^{-١}.\ ب \Leftarrow (أ^{-١}.\ أ) - هـ^{-١} = أ^{-١}.\ ب \Leftarrow و.\ هـ^{-١} = أ^{-١}.\ ب$$

$$\Leftarrow هـ^{-١} = أ^{-١}.\ ب$$

ثم نأخذ النظير الضربي لكلا الطرفين:

$$(هـ^{-١})^{-١} = (أ^{-١}.\ ب)^{-١} \Leftarrow هـ\ ب^{-١}.\ (أ^{-١})^{-١} \Leftarrow هـ = ب^{-١}.\ أ$$

وعليه نجد أولا النظير الضربي للمصفوفة ب $ب^{-١} = \frac{\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}}{٢} = \begin{bmatrix} ٠ & \frac{١}{٢} \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$



وبهذا يمكن إيجاد المصفوفة هـ على النحو:

$$\text{هـ} = \text{ب}^{-1} - \text{أ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال (٣٣– ٢):

لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} \text{م} & -2 \\ -4 & \text{ب} \end{bmatrix}$ وان نظيرها الضربي هو نفسها أوجد م–ب

الحل:

من المعطيات نلاحظ أن أ $^{-1}$ = أ وبضرب كلا طرفي المعادلة بالمصفوفة أ

$$(\text{أ}.\,\text{أ}^{-1}) = \text{أ}.\,\text{أ} \Leftarrow \text{و} = \text{أ}.\,\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{م} & -2 \\ -4 & \text{ب} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{م} & -2 \\ -4 & \text{ب} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{م}^2 - 8 & 2\text{م} + 2\text{ب} \\ -4\text{م} - 4\text{ب} & \text{ب}^2 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ومن تساوي المصفوفتين

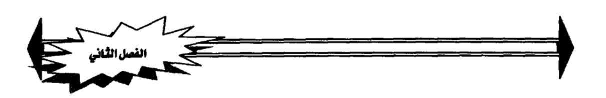
$$\text{م}^2 - 8 = 1 \Leftarrow \text{م}^2 = 9 \Leftarrow \text{م} = -3$$

$$\text{ب}^2 - 8 = 1 \;\; \text{ب}^2 = 9 \Leftarrow \text{ب} = 3$$

وعليه فإن:

(م = - ٣، ب = ٣) أو (م =٣، ب = - ٣) ومنه م – ب= - ٩





(٦- ٢) المصفوفة المنفردة وغير المنفردة

(Matrix Singular and non Singaular)

تعريف (٥- ٢): تسمي المصفوفة المربعة أ من الرتبة ن مصفوفة منفردة اذا كان

محدد أ = | أ | = ٠

أما اذا كان محدد أ = | أ | ≠ ٠ فإن المصفوفة تكون مصفوفة غيرمنفردة

مثال (٣٤ – ٢) لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ فهل المصفوفة أ مصفوفة منفردة

الحل:

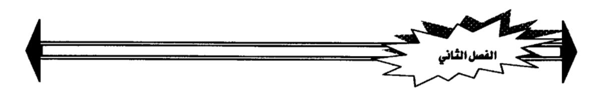
نجد محدد المصفوفة أ على النحو التالي أ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix}$ = ((٢) (٤) – (٣) (٥))= ٨ – ١٥=- ٧ ≠ ٠ فالمصفوفة أ غير منفردة.

مثال (٣٥ – ٢): لدينا المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٢- \\ ٢ & ٤ & ٥ \\ ١ & ٣ & ٢- \end{bmatrix}$ فهل المصفوفة منفردة؟

الحل:

المصفوفة ب منفردة لان محددها يساوي صفر حيث أن الصف أول والثالث في المصفوفة متشابهان.





(٢-٧) المصفوفة المحتواه (sub mattix)

تعريف (٦ - ٢): لتكن المصفوفة أ من الرتبة خـ١ × ن فنسمي المـصفوفة نفسها أو التي حذف بعض سطور أو أعمدة منهـا والناتجـة بعـد عمليـة الحـذف بالمصفوفة الجزئية أو المحتواه.

مثال (٣٦ – ٢):

لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٥ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٦ \\ ٢ & ٣ & ١- \end{bmatrix}$ كون مصفوفتين جزئتين لهذه المصفوفة.

الحل: المصفوفة الناتجة من حذف السطر الرابع من المصفوفة الاصلية.

(٢-٨) درجة المصفوفة (the rank of amatrix)

تعريف (٧- ٢): يقال لرتبة المصفوفة المربعة غير المنفردة والتي هي محتـواه في المصفوفة أعلى أنها درجة المصفوفة.

ملاحظة:

١) اذا كان لدينا المصفوفة امن الرتبة ن×ن مـصفوفة مربعـة واذا كـان أ ≠ ٠ فإن درجة المصفوفة درجة (أ) = ن.

٢) اذا كانت المصفوفة امن الرتبة ن×م فإن درجة المصفوفة درجة (أ) ≥ أقـل (م،ن).



مثال (٣٧- ٢): لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$ أوجد درجة هذه المصفوفة

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = (١).(٢) - (٣)(٤) = ٢ - ١٢ = - ١٠ \neq ٠$$

∴ درجة المصفوفة أ هي ٢.

مثال (٣٨- ٢): أوجد درجة المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & -٣ \\ ١ & ٣ & ٣ \end{bmatrix}$

الحل: نجد اولا محدد المصفوفة المعطاه أي

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ١ & ١ & -٣ \\ ١ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} = (٠)\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} - (-٣)\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} + ٣\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٠ + ٣(٣ - ٢) + ٣(١ - ٢) = ٣ - ٣ = ٠$$

∴ درجة المصفوفة (أ) < ٣

نختار مصفوفة مربعة مرتبتها ٢×٢ من المصفوفة أ ثم نجد محددها فإذا اختلف عن الصفر فإن درجة المصفوفة يتحدد فلتكن هذه المصفوفة.

$$أ_١ = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ١ - ٢ = - ١ \neq ٠$$

∴ فدرجة المصفوفة أمن الدرجة الثانية

مثال (٣٩-٢): لتكن المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٢ & -١ & ٢ \\ ٤ & ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}_{٣\times٤}$



الحل: لكون المصفوفة من الرتبة ٣×٤ فإن درجة المصفوفة

درجة (أ) ≤ ٣

نختار مصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة ولتكن أ١= $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ١ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$

وعليه فإن محدد المصفوفة على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} ٥+ \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} ٢- \begin{vmatrix} ١- & ٢ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} ١+ = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١- & ٢ \\ ١ & ١ & ٣ \end{vmatrix} =$$

= (- ١ - ٢)- ٢(٢- ٦)+٥(٢+٣)=- ٣+٨+٢٥+٣٠ ≠ ٠

E درجة المصفوفة من الدرجة الثالثة.

مثال (٤٠- ٢):

اذا كانت درجة المصفوفة أ= $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ & ٣+م \\ ٣- & ٤ & ١- \\ ١- & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$ تساوي ٢ فأوجد قيمة م

الحل:

لأن درجة المصفوفة ٢ معنى ذلك ولكونها من الرتبة الثالثة فإن محدد المصفوفة من هذه الرتبة يساوي الصفر وعليه لو أخذنا المفكوك بالنسبة للصف الثالث فإن:

$$٠ = (٢+ (٣+ م)٤) - = \begin{vmatrix} ٢ & ٣+م \\ ٤ & ١- \end{vmatrix} ١ - = \begin{vmatrix} ٠ & ٢ & ٣+م \\ ٣- & ٤ & ١- \\ ١- & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$



⇐ ٤ م + ١٢ +٢ =٠ ⇐ ٤ م = - ١٤ ⇐ = $\frac{-١٤}{٤}$ = $\frac{-٧}{٢}$

(٩-٢) المصفوفات ونظم المعادلات الخطية matrix and linear equation systems

تعريف (٨- ٢): على اعتبار أن

م لص+، س١، س٢،........، سن ل ح، م١١، م٢١،...، مم ل ح

فنسمي النظام الناتج من م معادلة من النوع

م١١س١١+ م٢١ س٢١ +.....+ م١ن س١ = ب١

والمحتوي على ن مجهول والذي هو على النحو التالي:

ظ م١١+ م٢١س٢+ ٠٠٠ + م١ن سن = ب١

م١٢س١+م٢٢ س٢+ ٠٠٠ + م٢ن س ن = ب١

....

م م١ س١+ م م٢س٢+.....+ م م ن س ن = بم

بنظام المعادلات الخطية المكون من م معادلة

ونسمي أ١١، أ٢١ ،...، أ١ن بمعادلات المعادلة الثابتة أما س١، س٢ ،....، س ن فنسميها مجاهيل المعادلة. وعندما نتحدث عن حل النظام نعني بذلك ايجاد قيم المجاهيل في النظام ظ. وقبل التفكير بحل النظام وعندها نتعرف على المصفوفات.



١) مصفوفة الثوابت: وهي معاملات المجاهيل في كـل معادلـة وتكتـب علـى شكل مصفوفة على النحو التالي:

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \cdots & أ_{من} \end{bmatrix}$$

٢) مصفوفة الثوابت وهي عناصر الطرف الايمن والتي سـترمز لهـا بـالرمز ب

$$حيث\ ب = \begin{bmatrix} ب_{١} \\ ب_{٢} \\ \cdots \\ ب_{م} \end{bmatrix}$$

٣) تكون مصفوفة المعاملات والثوابت على النحو التالي:

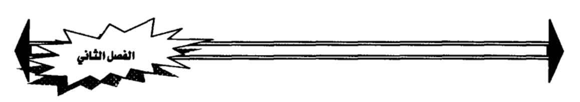
$$[\ أ/ب\ ] = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن}\ ب_{١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن}\ ب_{٢} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \cdots & أ_{من}\ ب_{م} \end{bmatrix}$$

٤) نضع النظام ظ على صورة يمكن معها حل هذا النظام على النحو التالي:

$$أ\ س = ب \Leftarrow \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ أ_{م١} & أ_{م٢} & \cdots & أ_{من} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \\ \cdots \\ س_{ن} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ب_{١} \\ ب_{٢} \\ \cdots \\ ب_{م} \end{bmatrix}$$

مثال (٤١-٢): لدينا نظام المصفوفات التاليه:

$$ظ :\ ٣س_{١} - ٥س_{٢} = ٧$$



$2س_1 + س_2 + س_3 = -1$

$4س_1 + 5س_2 - س_3 = 2$

والمطلوب:

كتابة مصفوفة المعاملات Cofficient Matrix

مصفوفة الثوابت Constants Matrix

مصفوفة المعاملات والثوابت Cofficient Matrix and Constants

مصفوفة المجاهيل Unknown Matrix

تعريف (٩-٢): اذا اجريت للمصفوفة أ عدة عمليات صفية فإن المصفوفة الناتجة ب هي مصفوفة مكافئة للمصفوفة أ ويرمز لها برمز أ= ب

وتكون درجة المصفوفتان المتكافئتان متساويتان

مثال (٤٢-٢): باستخدام العمليات الصفية لحل نظام المعادلات التالية:

ظ { $س_1 + س_2 + س_3 = 6$ .... $م_1$ }

$2س_1 + 3س_2 + 2س_3 = 14$ ...... $م_2$

$3س_1 + س_2 - س_3 = -2$ ...... $م_3$

نجري عمليات الصف التالية لنحصل على النظام المكافئ التالي $ظ^1$ وذلك:

$م_2 \leftarrow م_2 + (-2)\, م_1$، $م_3 \leftarrow م_3 + (-3)\, م_1$

لنحصل على نظام $ظ \leftarrow ظ_1$



$(ظ_1)$: { $س_1 + 2س_2 + 3س_3 = 6$ .... $م_1$ }

$-7س_2 - 4س_3 = 2$ .... $م_2$

$س_2 + 2س_3 = 4$ .... $م_3$

وبإجراء العملية الصفية التالية على النظام $ظ_1$ نحصل على نظام المكافئ $ظ_2$ والعملية هي:

$م_3 = (\frac{-1}{5})\, م_3$ والنظام المكافئ هو:

$(ظ_2)$: { $س_1 + 2س_2 + س_3 = 6$ .... $م_1$ }

$-7س_2 - 4س_3 =$ .... $م_2$

$س_2 + 2س_3 = 4$ .... $م_3$

وبتبديل الصف الثاني بالصف الثالث نحصل على نظام مكافئ للنظام $ظ^2$ وهو $ظ^3$ أي $م^2 \leftrightarrow م^3$ ينتج أن:

$(ظ_3)$: { $س_1 + 2س_2 + 3س_3 = 6$ .... $م_1$ }

$س_2 + 2س_3 = 4$ .... $م_2$

$-7س_2 - 4س_3 =$ .... $م_3$

واذا ما طبقنا العملية الصفية التالية $م_3 \leftarrow م_3 + 7م_2$ نحصل على نظام المكافئ $ظ_3$

$(ظ_4)$: { $س_1 + 2س_2 + 3س_3 = 6$ .... $م_1$

$س_2 + 2س_3 = 4$ .... $م_2$

$10\,x_3 = 30$ ..... م$_3$

وبإجراء العملية الصفية التالية:

م$_3$ ← $\frac{1}{10}$ م$_3$

نحصل على نظام (ظ٥) المكافئ للنظام (ظ٤)

(ظ٥) = { س$_1$ + ٢س$_2$ + ٣س$_3$ = ٦ ..... م$_1$ }

س$_2$ + ٢س$_3$ = ٤ ..... م$_2$

س$_3$ = ٣ ..... م$_3$

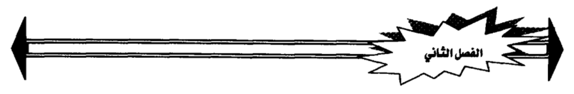
نلاحظ من النظام الاخير أنه تكون نظام معادلات على شكل مثلث وينتج أن س$_3$ = ٣ وبالتعويض في م$_2$ عن س$_3$ بالقيمة ٣ ينتج ان س$_2$ = -٢ وبالتعويض عن س$_2$، س$_3$ في معادلة م$_1$ ينتج ان س$_1$ = ١

الحل:

مصفوفة المعاملات أ = $\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

٢) مصفوفة الثابت ب = $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

١) مصفوفة المعاملات والثوابت [أ/ ب] = $\left[\begin{matrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}\right]$



٢) مصفوفة المجاهيل س = $\begin{bmatrix} س_١ \\ س_٢ \\ س_٣ \end{bmatrix}$

(١٠-٢) طرق حل أنظمة المعادلات الخطية:

أ) طريقة الصف البسيط لحل أنظمة المعادلات الخطية تتمثل هذه الطريقة بالخطوات التالية:

- ليكن م ي، م ر، ي≠ ر هو ترتيب لمعادلات مختلفة من النظام ظ فيمكن تبديل موقع معادلة بمعادلة أخرى وهذه العملية توضحها بالعلاقة م ي ↔ م ر.

يمكن ضرب أي معادلة بعدد حقيقي (جـ) بحيث أن جـ ∈ح - {٠}

وتوضح هذه العملية على النحو م ر ←جـ م ر.

ضرب أي معادلة م١ بعدد جـ ∈ ح - {٠} وإضافة ناتج الضرب إلى معادلة أخرى بحيث تتأثر المعادلة المضاف إليها ولا تتأثر المعادلة الضرورية ويمكن تمثيل هذه العملية على النحو م ر ←م ر + جـ ي

ملاحظة:

يمكن تطبيق الخطوة الثانية والثالثة كل على حدى لعملتين منفصلتين:

تعريف (١٠– ٢): يقال لنظم المعاملات الخطية ظ٢ والناتج من إجراء عمليات منتهية على ظ١ بانه نظام مكافئ للنظام.



$ظ_1$ وتكتب على الصورة $ظ_1 = ظ_2$ ان مجموعة حل كل نظام من المعاملات الخطية متساوية وعليه اذا حصلنا على حل للنظام $ظ_2$ بعد عمليات صفية متكافئة فإن هذا الحل يعتبر حل للنظام $ظ_1$ المكافئ له أيضا.

وفلسفة هذه الطريقة تقوم على البدء بمصفوفة المعاملات والثوابت لنعتبره نظام معاملات أولي $ظ_1$

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام طريقة كريمر:

١) حل نظام المعادلات الخطية بمجهولين:

أ) اذا كان عدد المجاهيل يساوي عدد المعاملات نبدأ بالانظمة ذات المجهولين وبمعادلتين على النحو التالي:

$$أ_{11} س_1 + أ_{21} س_2 = ب_1$$

$$أ_{12} س_1 + أ_{22} س_2 = ب_2$$

لنرمز لمحدد مصفوفة المعاملات $\Delta = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{vmatrix}$

كذلك لنرمز لمحدد المتغير $س_1$ بالرمز Δ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} ب_1 & أ_{21} \\ ب_2 & أ_{22} \end{vmatrix} ، \Delta_2 = \begin{vmatrix} أ_{11} & ب_1 \\ أ_{12} & ب_2 \end{vmatrix}$$

وعليه يمكن كتابة النظام أعلاه على نحو:



Δ س$_1$ = Δ_1 ⇐ س$_1$ = $\frac{\Delta_1}{\Delta}$

Δ س$_2$ = Δ_2 ⇐ س$_2$ = $\frac{\Delta_2}{\Delta}$

ويسمى هذا الحل بطريقة كريمر لحل المعاملات وتكون مجموع الحل $\left\{\frac{\Delta_1}{\Delta}، \frac{\Delta_2}{\Delta}\right\}$

ملاحظة:

1) اذا كان $\Delta \neq 0$ فانه يوجد حل وحيد لنظام المعاملات أي أن الحل هو نقطة تقاطع الخطين المثلين لكل معادلة.

2) اذا كان $\Delta = 0$ وكان على الاقل أحد Δ_1 ، Δ_2 يختلف عن الصفر فانه لا يوجد حل لهذا النظام ومعنى ذلك أن الخطين الممثلان لكل معادلة متوازيان.

3) أما اذا كان $\Delta = 0$، $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ فانه يوجد عدد لانهائي لهذا النظام.

مثال (43- 2): باستخدام طريقة كريمر حل نظام المعادلات التالية:

3س$_1$- س$_2$=- 1

4س$_1$ + 2س$_2$=7

الحل: نجد اولا محددة المصفوفة المعاملات:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 .(3) - (-1).4 = 10 \neq 0$

ولكون $\Delta \neq 0$ فانه يوجد حل وحيد لهذا النظام ثم نجد:



$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (-1).2 - 7.(-1) = 5$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3.(7) - (4).(1) = 25$$

وعليه فإن $س_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$س_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

مثال (٤٤-٢): باستخدام طريقة كريمر حل نظام المعادلات التالية ثم أوجد مجموعة الحل:

$س_1 - 3س_2 = -7$

$2س_1 - 6س_2 = 7$

الحل: نجد محدد مصفوفة المعاملات $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = 1.(-6) - (-3).2 = 0$

لذا فاما أن لا يكون للنظام حل أوعد لا نهائي من الحلول وعليه فإننا نجد Δ_1، Δ_2:

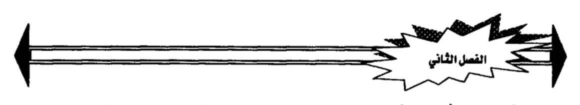
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = (-7).(-6) - (-3).7 = 63 \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1.(7) - (-7).2 = 21 \neq 0$$

لذا فإن النظام ليس له حل وتكون مجموعة الحل = $\varnothing$

ب) اذا كان عدد المجاهيل لا يساوي عدد المعادلات فإذا كان:





١) عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات فإن للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

٢) في حالة ما اذا كان عدد المجاهيل أقل من عدد المعادلات فإننا نأخذ عدد من المجاهيل مساو لعدد المعادلات ونحل النظام فإذا كانت مجموعة الحل تحقق باقي المعادلات فإن الحل يكون وحيدا أما اذا لم تحقق فلا يوجد حل لهذا النظام.

مثال (٢-٤٥): أوجد مجموعة حل نظام المعادلات التالية ٢س - ٤ص =٦

الحل: ك ∋ح، ص= ك ⇐ ٤س - ٤ك = ٦

⇐ س= ٢ك+ ٣ = ٦

وعليه فإن النظام له مجموعة من لانهائي = { (٢ك +٣، ك): ك∋ ح }

مثال (٢-٤٦): حل نظام المعادلات التالية:

س + ٢ص = - ٤

٥س + ٣ص =١

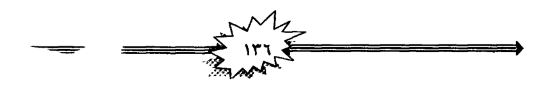
٢س − ص = ٧

الحل: نأخذ النظام المكون من أول معادلتين لأن عدد المجاهيل مجهولين:

س + ٢ص = - ٤

٥س + ٣ص = ١

ثم نبدأ بحل هذا النظام بالطرق السابقة وذلك بايجاد:



$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٢ - ١٠ = -٧$$

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} -٤ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix} = -١٢ - ٢ = -١٢ ،\quad \Delta_{٢} = \begin{vmatrix} ١ & -٤ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ١ + ٢٠ = ٢١$$

وعليه فإن $س = \frac{\Delta_{١}}{\Delta} = \frac{-١٤}{-٧} = ٢$، $ص = \frac{\Delta_{٢}}{\Delta} = \frac{٢١}{-٧} = -٣$

وبالتعويض عن قيم س، ص في المعادلة الثالثة:

$$٢(٢) - (-٣) = ٧$$

$$٧ = ٧$$

وبما ان مجموعة الحل الناتجة حققت المعادلة الثالثة:

∴ مجموعة الحل للنظام هي {(- ٣، ٢)}

حل نظام المعاملات الخطية ذات الثلاثة مجاهيل ليكن لدينا نظام المعادلات التالية:

$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + أ_{٣١} س_{٣} = ب_{١}$

$أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} + أ_{٣٢} س_{٣} = ب_{٢}$

$أ_{١٣} س_{١} + أ_{٢٣} س_{٢} + أ_{٣٣} س_{٣} = ب_{٣}$

لحل مثل هذا النظام نجد وكما سبق محددات كل من مصفوفة المعاملات ومحددات كل من المتغيرات:

$س_{١}، س_{٢}، س_{٣}$ وذلك على نحو التالي:



$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} ،$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{ب}_2 & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{ب}_3 & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} ، \Delta_2 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{ب}_1 & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{ب}_2 & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{ب}_3 & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} ، \Delta_3 = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{ب}_2 \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{ب}_3 \end{vmatrix}$$

وهناك ثلاث احتمالات

١) اذا كانت $\Delta \neq 0$ فإن الحل الوحيد لهذا النظام هو

$$\left\{\left(\text{س}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} ، \text{س}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} ، \text{س}_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}\right)\right\}$$

٢) اذا كانت $\Delta = 0$ وكان أحد Δ_1 ، Δ_2 ، Δ_3 يختلف عن العنصر فإنه لا يوجد حل لهذا النظام.

٣) اذا كان $\Delta = 0$ ، $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ فإن للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

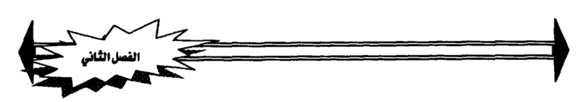
مثال (٤٧-٢): باستخدام طريقة كريمر حل نظام المعادلات التالية:

$$\text{س} - \text{ص} + 6\text{ع} = -15$$

$$3\text{ص} - 2\text{ع} = 18$$

$$5\text{س} + 2\text{ع} = -8$$

الحل: نجد المحددات Δ ، Δ_1 ، Δ_2 ، Δ_3 على النحو التالي:



$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٦ \\ ٠ & ٣ & -٢ \\ ٥ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = ٤٧ \neq ٠$$ وعليه فإن للنظام حل وحيد ولذا نجد محددات المتغيرات

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} ١٥ & -١ & ٦ \\ ١٨ & ٣ & -٢ \\ ٥ & ٠ & ٢ \end{vmatrix} = -٤٧ ،\quad \Delta_٢ = \begin{vmatrix} ١ & -١٥ & ٦ \\ ٠ & ١٨ & -٢ \\ ٥ & -٨ & ٢ \end{vmatrix} = -٣٧٠ ،$$

$$\Delta_٣ = \begin{vmatrix} ١ & -١ & -١٥ \\ ٠ & ٣ & ١٨ \\ ٥ & ٠ & -٨ \end{vmatrix} = ١١١$$

وعليه يكون الحل الوحيد هو:

(س، ص، ع) =

$$\left(\frac{\Delta_١}{\Delta}، \frac{\Delta_٢}{\Delta}، \frac{\Delta_٣}{\Delta}\right) = \left(\frac{-٧٤}{-٧٤}، \frac{-٣٧٠}{٧٤}، \frac{١١١}{-٧٤}\right) = \left(١، ٦، \frac{-٣}{٢}\right)$$

مثال (٤٨-٢): باستخدام طريقة كريمر حل نظام المعادلات التالية:

٢س − ص + ع = ٤

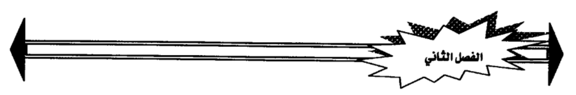
س + ٣ص + ٢ص = ١٢

٣س + ٢ص + ٣ع = ١٦ ثم أوجد مجموعة الحل:

الحل: نجد أولا محددة مصفوفة المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٠$$





وعليه اما ان لا يكون هناك حل للنظام أو قد يكون هناك عدد لا نهائي من الحلول.

وهذا يعتمد على كل من محددات المتغيرات المعطاة:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 12 & 3 & 2 \\ 16 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \,،\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \\ 3 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 0 \,،\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

لذا فإن للنظام عدد لا نهائي من الحلول وللبحث عن مجموعة الحل نستخدم مبدأ الصف البسيطة: ٣س – ص + ع = ٤ .... م١

س + ٣ص + ٢ص = ١٢ ....م٢

٣س + ٢ص + ٣ع = ١٦ ....م٣

م١ ← م١ - ٢ م٢ ، م٣ ← م٣ - ٢ م٣ +٣ م١

وبتطبيق عمليات الصف البسيطة لنحصل على النظم المتكافئة:

} س+٣ص +٢ع ≈ { س+٣ص +٢ع ≈ { - ٧ص - ٣ع = - ٢٠

س+ ٣ص +ع =١٢   - ٧ص - ٣ع = - ٢٠   - ٧ص - ٣ع = - ٢٠

٧ص - ٣ع = - ٢٠   - ٧ص - ٣ع = - ٢٠

نفرض أن ك ∋ ح ولنأخذ ع = ك في هذا النظام لنحصل على:

$ص = \frac{٢٠-٣ع}{٧} = \frac{٢٠-٣ك}{٧}$ ،

$س = ١٢ - ٢ع - ٣ص \leftarrow س = \frac{٢٤-٥ع}{٧} = \frac{٢٤-٥ك}{٧}$



ويكون حل النظام بدلالة ك على النحو التالي:

$$(س، ص، ع) = \left(\frac{٢٤-٥ك}{٧} = \frac{٢٠-٣ك}{٧}، ك \right)$$

وعليه فيكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول معتمداً على قيمة ك وعلى سبيل المثال فلو فرضنا قيمة:

ك= - ٥ فإن هذا الحل يصبح

$$ظ= \left(\frac{+٢٤-٥ك}{٧} = \frac{٢٠-٣ك}{٧}، ك \right)$$

حل نظام المعادلات الخطية المتجانسة:

ان ما يميز هذا النوع من المعادلات أن الطرف الآخر يساوي صفراً فالأنظمة التالية تمثل أنظمة متجانسة.

$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + أ_{٣١} س_{٣} = ٠$

$أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} + أ_{٣٢} س_{٣} = ٠$

$أ_{١٣} س_{١} + أ_{٢٣} س_{٢} + أ_{٣٣} س_{٣} = ٠$

وفي هذا النظام يتساوي فيه عدد المجاهيل مع عدد المعادلات وقد يقل عدد المعادلات عن عدد المجاهيل أيضا كما هو الحال في هذا النظام:

$أ_{١١} س_{١} + أ_{٢١} س_{٢} + أ_{٣١} س_{٣} = ٠$

$أ_{١٢} س_{١} + أ_{٢٢} س_{٢} + أ_{٣٢} س_{٣} = ٠$



وللبحث عن حلول هذه الانظمة من المعادلات نجد المحددات المرافقة لكل من المتغيرات المعطاه.

$$\Delta^{١} = \begin{vmatrix} ٠ & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ ٠ & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

خاصية من خصائص المحددات:

$$\Delta^{٢} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & ٠ & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & ٠ & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & ٠ & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = ٠ \quad ، \quad \Delta^{٣} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & ٠ \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & ٠ \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & ٠ \end{vmatrix} = ٠$$

ولكون $\Delta^{١} = \Delta^{٢} = \Delta^{٣} = ٠$ يظهر لدينا احتمالين:

١) هناك حل وحيد لهـذا النظـام اذا كـان $\Delta \neq ٠ \Leftarrow$ (س١، س٢، س٣) = (٠، ٠، ٠)

٢) اذا كانت $\Delta = ٠$ فإن هناك عدد لا نهائي لأي من الحلول.

مثال (٤٩-٢): حل نظام المعادلات المتجانسة التالية

$$٣\text{س} - ٤\text{ص} = ٠$$

$$٢\text{س} + \text{ص} = ٠$$

الحل: نجد أولا محدد مصفوفة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = ٣ + ٨ = ١١ \neq ٠$$



* يوجد حل وحيد لهذا النظام وهو (س، ص) = (٠، ٠)

* المعادلات المتجانسة التالي س − ص + ٢ ع =٠

مثال (٥٠-٢): حل نظام المعادلات المتجانسة التالي:

س−ص+٢ع−٠.

٢س + ص − ٣ع = ٠

٤س − ص + ع = ٠

الحل: نجد ألا محدد مصفوفة المعاملات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١- & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣- \\ ٤ & ١- & ١ \end{vmatrix} = ٠$$

ولان هذا المحدد صفرا فإنه يوجد لهذا النظام عدد لا نهائي من الحلول وللبحث عن الحل نستخدم طريقة الصف البسيطة:

م٣ ← ٢ م١ + م٢

س − ص+ ٢ ص =٠... م١

٢ س + ص − ٣ص = ٠... م٢

٤ س − ص + ع = ٠... م٣

والنظام المكافئ لهذا النظام بعد سلسلة من العمليات

س − ص + ٢ ع = ٠



س + ص – ٣ع = ٠

وعلى اعتبار أن ك ∈ ح وباختيار ك = ع لنحصل على النظام التالي

س – ص = - ٢ ك

٢ س + ص = ٣ ك

وبحل هذا النظام نحصل على حل مرتبط بالمتغير ك

$س = \frac{ك}{٣}$، $ص = \frac{٧ ك}{٣}$

وعليه فإن مجموعة الحل هي ظ = ($\frac{ك}{٣}$، $\frac{٧ ك}{٣}$، ك) ؛ ك ∋ ح

مثال (٥١– ٢) على اعتبار أن

$أ = \begin{bmatrix} ٢ & \sqrt{٢} \\ \sqrt{٢} & ١ \end{bmatrix}$ أوجد مجموعة حل المعادلة (أ– س. أ. أ^{١}) = ٠

الحل: من كون

$س \begin{bmatrix} -١ \\ ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢١ \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{bmatrix} -س \\ ٢س \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} س + ٣ص \\ ٥س + ٠ \times ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢١ \end{bmatrix}$

$\Leftarrow \begin{bmatrix} -س + س + ٣ص \\ ٢س + ٥س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ \\ ٢١ \end{bmatrix} \Leftarrow ٣ص = ٦، ٧س = ٢١$

$\Leftarrow$ ص = ٢: س = ٣ $\Leftarrow$ (س، ص) = (٣،٢)

$أ.أ^{١} = و = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$أ - س. و = \begin{bmatrix} ٢ & \sqrt{٢} \\ \sqrt{٢} & ١ \end{bmatrix} - س \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & \sqrt{٢} \\ \sqrt{٢} & ١ \end{bmatrix} -$

$$\begin{bmatrix} س & 0 \\ 0 & س \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-س & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-س \end{bmatrix}$$

$$|أ- س و| = 0 \Leftarrow \begin{vmatrix} 2-س & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-س \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow (2- س)(1- س) - \sqrt{2}.\sqrt{2} = 0$$

$$2 - 2س - س + س^2 - 2 \Leftarrow س^2 - 3س = 0$$

$$\Leftarrow س = 0 ، س = 3$$

أمثلة إضافية

مثال (52 – 2)= لدينا مصفوفة

$$أ = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ أوجد قيمة العنصر $ا_{32}$ من $أ^{-1}$

الحل:

ليكن أي عنصر من $أ^{-1}$ هو $ا_{من}$ ومن العلاقة:

$$ا_{من} = \frac{أ_{نم}}{|أ|} \Leftarrow ا_{32} = \frac{أ_{23}}{|أ|} ، أ_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-0) = -6$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

$$ا_{32} = \frac{-6}{11}$$

مثال (53– 2): اذا كان $أ = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ وكان $(أ)^2 س = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$



أوجد المصفوفة س.

الحل: $أ^{٢} . س = \begin{bmatrix} ٠ \\ -٣ \end{bmatrix} \Leftarrow س = أ^{-٢} . \begin{bmatrix} ٠ \\ -٣ \end{bmatrix} = (أ^{-١})^{٢} . \begin{bmatrix} ٠ \\ ٣ \end{bmatrix}$

$أ^{-١} = \dfrac{\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} -١ & ٣ \\ ٢ & -٥ \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} \Leftarrow (أ^{-١})^{٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ١٤ & ٢٥ \end{bmatrix}$

$س = (أ^{-١})^{٢} . \begin{bmatrix} ٠ \\ -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٩ \\ ١٤ & ٢٥ \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} ٠ \\ -٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٥ \\ -٢٤ \end{bmatrix}$

مثال (٥٤ـ ٢): إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & جتا٤٥° & م\ جتا^{٢}٥° \\ ١ & جتا٥٠° & ٢\ جتا^{٢}٤٠° \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

أوجد محدد هذه المصفوفة

الحل:

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & جتا٤٥° & م\ جتا^{٢}٥° \\ ١ & جتا٥٠° & ٢\ جتا^{٢}٤٠° \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & جتا٤٥° & ٢\ جتا^{٢}٥° - ١ \\ ١ & جتا٥٠° & ٢\ جتا^{٢}٤٠° - ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

$= (٢\ جتا^{٢}٥° - ١) . جتا\ ٥٠ - (٢\ جتا^{٢}٤٠° - ١)\ جتا\ ٤٠°$

ومن المتطابقة $٢\ جتا^{٢}م - ١ = جتا\ ٢م \Leftarrow ٢\ جتا^{٢}٥° - ١ = جتا١٠°$

$\Leftarrow جتا\ ١٠°\ جتا\ ٥٠° - جتا\ ٨٠° جتا\ ٤٠° = جتا\ ١٠°$

$جتا\ ٥٠° - جا\ ١٠°\ جا\ ٥٠°$

$\Leftarrow$ جتا (٥٠+١٠) = جتا ٦٠ = $\frac{١}{٢}$

مثال (٥٥-٢): على اعتبار أن $(أ^{-١})^{ت}$ + س = و س← و − $((أ^{-١})^{ت}$

وان $(أ^{-١})^{ت}$ + س = و أ أوجد المصفوفة س

الحل:

أ= $\begin{bmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٢ \end{bmatrix}$ وعليه نجد أولا المصفوفة النظيرة

$$أ^{-١} = \frac{\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix}}{٤} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١-}{٢} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix} ، (أ^{-١}) = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١-}{٢} \\ \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$$

$$س = و − (أ^{-١}) = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} − \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١-}{٢} \\ \frac{١}{٤} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{١-}{٢} \\ \frac{١}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{bmatrix} = \frac{١}{٤} \begin{bmatrix} ٢ & ٢- \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

مثال (٥٦– ٢): اذا كان $\begin{bmatrix} ١- & ٣ & ٥ \\ ٤ & ١٢- & ك \end{bmatrix} \in ح$

وكانت درجة المصفوفة ٢ اوجد قيمة ك التي لا تحقق هذه الدرجة:

الحل:

من المصفوفة أ نأخذ مصفوفات جزئية من الرتبة الثانية مثل:

$$\begin{bmatrix} ١- & ٣ \\ ٤ & ١٢- \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ١- & ٥ \\ ٤ & ك \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١٢- & ك \end{bmatrix}$$





ولكون:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} = 12 - 12 = 0 \Leftarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & \text{ك} \end{bmatrix} = -\text{ك} - 20 \neq \Leftarrow \text{ك} \neq -20$$

تمارين عامة (الاسئلة المقالية)

س١) على اعتبار أن ب – أ = - ٤، جـ - ب = ٢ أوجد محدد المصفوفة أ حيث:

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & \text{م} & \text{ب ج} \\ 1 & \text{ب} & \text{ج م} \\ 1 & \text{ج} & \text{م ب} \end{vmatrix}$$

س٢) على اعتبار أن أ. ب = ٧، أ = $\begin{bmatrix} \text{م} & \text{ب} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ واذا كان $|\text{أ.أ}^{\text{ت}}|$ = ٨، فأوجد قيمة $|\text{م+ب}|$

س٣) لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} \text{م}-2 & \text{م} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ والاقتران ق (س) = س^{2}+١ فإذا كان درجة (أ) = ١ أود صورة المصفوفة ق (أ)

س٤) أ = $\begin{bmatrix} 1-\text{جا س} & 1-\text{جتا س} \\ \text{جتا س} & 1+\text{جا س} \end{bmatrix}$، $\forall$س $\in \left(0، \frac{\pi}{2}\right)$

أوجد قيمة س بالراديان الذي يجعل المصفوفة أ عندها ليس معكوس بالنسبة لعملية الضرب

س٥) أوجد مجموع جذور المعادلة $\begin{vmatrix} |2\text{س}-1| & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11$



س ٦) أوجد محدد $\begin{vmatrix} ٦ & ٠ & ٤ \\ ٨ & ٠ & ٥ \\ ٩- & ٤- & ٧ \end{vmatrix}$

س٧) اذا كان أ = $\begin{bmatrix} ٣ \\ ٢ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١- & ١ \end{bmatrix}$، $\hat{ج}$ = $\begin{bmatrix} ٠ & ٢ \\ ٣ & ٠ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix}$ أوجد قيمة المحدد

$|\text{أ(ب } \hat{ج})|$

س ٨) أوجد محدد المصفوفة $\begin{vmatrix} \text{ب+ج} & \text{ب ج} & ١ \\ \text{ج+أ} & \text{ج أ} & ١ \\ \text{ج+ب} & \text{أب} & ١ \end{vmatrix}$

س ٩) اوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٠ & \text{جاب} & \text{جاأ} \\ ١ & \text{١+ جتاب} & \text{١+ جتاأ} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

س١٠) أوجد مجموع جذور المعادلة $\begin{vmatrix} ١ & |\text{س+٢}| \\ ٢ & |\text{س}^٢-٤| \end{vmatrix}$

س ١١) أوجد قيم $\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٢ & ١ \\ ٧ & ٦ & ٥ & ٠ \\ ٩ & ٨ & ٠ & ٠ \\ ٩ & ٦ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$

س ١٢) اذا كانت $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ أوجد $|\text{أ}^{-١}|$

س ١٣) اذا كان $\begin{vmatrix} \text{جا٥٠-} & \text{جتا٥٠} \\ \text{جا٢٠} & \text{جتا٢٠-} \end{vmatrix}$ = ٢س+ $\frac{٧}{٢}$ أوجد قيمة س.

س ١٤) اذا كان $\begin{vmatrix} م & ١ & ٢ \\ ب & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٠ \end{vmatrix} = ٢$

أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٢م & ٢ & ٤ \\ ٢ب & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٦ & ٠ \end{vmatrix}$

س ١٥) على اعتبار أن $\begin{vmatrix} ب ج & م & ١ \\ ج م & ب & ١ \\ ١ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ك. (ب − م): (جـ − م).

أوجد قيمة ك

س ١٦) أوجد مجموع جذور المعادلة $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & س^{٢} \\ ١ & −١ & س \\ ٤ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

س ١٧) في محدد المصفوفة $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & −٢ \\ ٥ & ٤ & −١ \\ ٤ & −٣ & ك \end{vmatrix}$ اذا كان مرافق العنصر $أ_{٢٢}$ هو العنصر ٤، ك ∈ ح، أوجد قيمة ك

أسئلة موضوعية:

س١) إن قيمة ك التي تجعل لنظام المعادلات التالية:

س+ ص+ ك ع = ٢

٣ س + ٤ص + ٢ ع = ك

٢ س + ٣ص – ع = ١

أكثر من حل هي

أ) – ٢ ب) –١ جـ) ٠ د) ٣ هـ) ٤

س٢) اذا كان
$$\begin{vmatrix} ٢+م & م-٢ & م \\ ٣+م & م-٥ & م \\ م & -م & م \end{vmatrix}$$
فإن قيمة م هي:

أ) ١ ب) ٢ جـ) ٣ د) ٤ هـ) ٥

س ٣) ان محدد المصفوفة أ =
$$\begin{vmatrix} ١+ جتا\alpha & ١+جا\alpha & ١ \\ ١-جا\alpha & ١+ جتا\alpha & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$
هو

أ) - ١ ب) ٠ جـ) ١ د) جتا α هـ) جا ٢ α

س٤) حتى تكون مجموعة حل النظام م س- ٤ ص = م + ١

٢س + (م + ٦) ص = م +٣ مجموعة خالية فإن قيمة أ هي

أ) - ٦ ب) - ٤ جـ) ٠ د)٢ هـ) ٦

س٥) لدينا المصفوفات التالية أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$، ب = $\begin{bmatrix} م \\ ب \end{bmatrix}$، ج = $\begin{bmatrix} ٢١ \\ م+ب \end{bmatrix}$ واذا كان ب = أ$^{-١}$ ـ ج ⇐ م =

أ) - ٨   ب) - ٦   جـ) - ١   د) ٣   هـ) ٥

س٦) ان مجموع جذور المعادلة $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ & -٢ \\ ٥ & ٤ & -١ \\ ٤ & -٣ & ك \end{vmatrix}$ هو

أ) - ٤   ب) - ٢   جـ) ٠   د) ٢   هـ) ٤

س٧) في محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & س^{٢} \\ ١ & -١ & س \\ ٤ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ كان مرافق العنصر ك ∋ح، أ$_{٢٢}$ = ٤،

فإن قيمة ك هي:

أ) - ٤   ب) - ٢   جـ) ٠   د) ٢   هـ) ٤

س٨) اذا كان ٢ أ + ٤ $\begin{bmatrix} ٣ & -\frac{١}{٢} \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$ فإن محددة أ هي:

أ) -٣   ب) - ١   جـ) ١   د) ٣   هـ) ٥

س٩) ان حاصل ضرب المحددتين $\begin{vmatrix} جا\frac{\pi}{١٢} & جتا\frac{\pi}{١٢} \\ جتا\frac{\pi}{١٢} & جا\frac{\pi}{١٢} \end{vmatrix}$. $\begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

أ) - ٢ $\sqrt{٣}$ ب) - ٦   جـ) - $\sqrt{٣}$ د) ٢$\sqrt{٣}$ هـ) ٤ $\sqrt{٣}$

س١٠) لدينا المصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ فإن قيمة $|أ| - |أ^{-١}|$ هي

أ) ٠ ب) ٤ جـ ٩، ٦ د) ٨ هـ ٩, ٩

س١١) لدينا ∀ م، ب ∋ ح، أ= $\begin{bmatrix} ١ & م \\ -٢ & ب \end{bmatrix}$ ، ب= $\begin{bmatrix} ١٠ & ١٣ \\ ١٣ & ٢٩ \end{bmatrix}$ وكان $أ^{ت} = أ^{١}$

فإن م+ ب هي

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٦ د) ٨ هـ)٩

س١٢) لدينا أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، Δ $أ^{١}$ هي المصفوفة النظيرة فإن قيمة

$|أ| - |أ^{١}|$ يساوي

أ) ٠ ب) ٤ جـ) ٩ , ٦ د) ٨ هـ) ٩ , ٩

س١٣) اذا كان ق (س) $\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} \frac{٢}{٣}س+١ \end{bmatrix} & ١-(س-٣) \\ لو_{هـ} هـ^{س} & ٣ \end{vmatrix}$ فإن قيمة ق (٢) هي

أ) ٢ ب) ١ جـ) ٠ د) - ١ هـ) - ٢

س١٤) لدينا $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$، ب= $\begin{bmatrix} -١ & ١ \\ ٢ & ٠ \end{bmatrix}$ فإن القيم الحقيقيـة اذا كـان | أ. (ب) + س | = ٣ هي

أ) { - ٢، ١ } ب) { - ٣، ٥ }

جـ) { - ١، ٤ } د) { - ٧، ١ } هـ) { ٢، - ٥ }



س١٥) $\begin{vmatrix} \text{جتا س} & \text{جا س} \\ -1 & \text{قتا س} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ظا س} & 1 \\ \text{جا س} & \text{جتا س} \end{vmatrix}$

أ) ١ ب) جا ٢ س جـ) جتا ٢س د) جا^{٢} س هـ) جتا^{٢}س

س١٦) لدينا ٢س + ص= ٢ فإن س. ص.ع هي:

ع – ٤ص = ٠

٤س + ع = ٦

أ) - ٢ ب) $\frac{-1}{2}$ جـ) ٢ د) ٣ هـ) ٤

س١٧) على اعتبار ان أ. ب. جـ = ٢، أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣} = ١٢ فإن:

$\begin{vmatrix} \text{ب+ج} & \text{أ-ب} & \text{أ} \\ \text{ج+أ} & \text{ب-ج} & \text{ب} \\ \text{أ+ب} & \text{ج-أ} & \text{ج} \end{vmatrix}$

أ) – ١٤ ب) - ٦ جـ) ٠ د) ٦ هـ) ١٨

س١٨) حتى يكون للنظام ٣ س + (ك – ١) ص = (ك + ١)، (ك + ١) س+ ص = ٣

أ) – ٣ ب) – ٢ جـ)- ١ د) ١ هـ) ٢



مفاهيم عامة في التوابع
والاستمرار والاشتقاق



الفصل الثالث

مفاهيم عامة في التوابع والاستمرار والاشتقاق

تعريف: نقول عن التطبيق ق: د ⊇ح←ح انه تابع حقيقي معرف على المجموعة الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ونكتب ق (س) = ص.

تعريف: نقول عن س أنه متحولا إذا أمكن إعطاءه قيما كيفية دون المساس بوضعه. ونقول عن س انه ثابت إذا كان إعطاءه قيما كيفية يؤثر في نوعه يتبين ذلك إذا لاحظنا أن $س^{٢}$ = ص حيث س هنا متحول يمكن إعطاءه قيما كيفية دون أن يتأثر وضعه كمتحول. أما على سبيل المثال س = ٢ فانه إذا أعطيناه قيمة أخرى فإن العلاقة سوف تنكسر صحتها وبالتالي فإن: س = ٢هو ثابت.

إن هذا يقودنا إلى مفهومين أساسين هما المعادلة والمطابقة.

تعريف: نقول عن ق (س) = جـ أنها معادلة إذا كانت صحيحة فقط من أجل قيم ثابتة وذات عدد منته لـ س. ونقول عن ل =ق (س) أنها مطابقة إذا كانت صحيحة من أجل أي س مهما كان س.

المتحول المستقل والمتحول التابع: نقول عن س في العلاقة ص = ق (س) انه متحولا مستقلا إذا كان تغييره يؤدي إلى تغير ص وعندها نقول أن ص متحولا تابعا لـ س.

مجموعة التعريف: هي مجموعة جزئية من منطلق التابع تمثل المنطلق الفعلي للتابع ق.



مجموعة المدى: هي مجموعة جزئية من مستقر التابع تمثل المستقر الفعلي للتابع ق.

الخواص الجبرية للتوابع الحقيقة:

١– التابع المتباين: نقول عن ق انه تابعا متباينا إذا كان

∀ س١، س٢ ∈ د: س١ ≠ س٢ ⇐ ق (س١) ≠ ق (س٢)

وبالتالي فإن كل عنصر من المدى – المستقر الفعلي – سيكون صورة لعنصر واحد على الأكثر من مجموعة التعريف ما يجعلنا نقول انه إذا كان التابع متباينا فانه عند ذلك فقط يكون للمعادلة ق (س)= ص حلا وذلك باعتبار ص ثابتا معلوما وسيكون حلا واحدا على الأكثر

مثال:

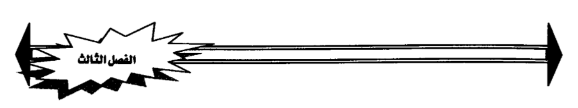
س٢ = ق (س) بملاحظة أن هذا التابع غير متباين لأن ق (-٢) = ق (٢) =٤
وأيضاً بملاحظة انه بحل المعادلة س٢ =ص نجد حلين مختلفين س= ± √ص

وهذا منا

قض لتعريف التابع المتباين وبملاحظة التابع ق (س) = س٣ فإن هذا التابع يمثل تابعا متباينا ذلك لأنه:

∀ س١ ، س٢ ∈ ح: س١ ≠ س٢ ⇐ س١٣ ≠ س٢٣ ⇐ ق (س١) ≠ ق (س٢)

وأيضاً إذا أجرينا حلا للمعادلة س٣ = ص فإن س = ∛ص هو حل وحيد وبالتالي فإن ق (س) =س٣ تابعا متباينا.



٢- التابع الغامر: نقول عن التابع ق انه تابعا غامرا إذا كان:

∀ ص ∋ح المستقر: ∴ × ∋ ⊂ ⊆ح، ق (س)، ص

وبالتالي كل العناصر في المستقر يقابلها س واحد على الأقل بحيث يكون ق (س) = ص وهذا ما يجعلنا نؤكد وجود حلا واحدا على الأقل للمعادلة ق (س) = ص وذلك باعتبار ص ثابتا معلوما.

مثال: ق (س) = س^{٢} + ١ إن هذا التابع ليس غامرا لأنه من أجل ص = صفر نجد أن المعادلة

س^{٢} +١ = صفر غير قابلة للحل في ح.

أما من أجل التابع ق (س) = س^{٣} +٣ فإن المعادلة ص= س^{٣} +٣ تملك حلا ويعطي بالشكل س= $\sqrt[٣]{ص-٣}$ الأمر الذي يؤكد أن هذا التابع غامرا.

٣- التابع التقابل: نقول عن ق انه إذا كان ق متباينا وغامراً وعندها سيكون للمعادلة ق (س) =ص

حلا وحيدا باعتبار ص ثابتا معلوما.

العمليات على التوابع:

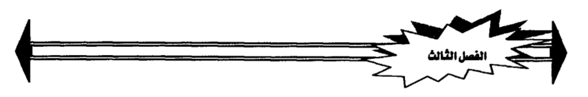
١- (ق+ع) (س) = ق(س) +ع (س)

٢- (∝ . ق) (س) = ∝ق (س)

٣- (ق.ع) (س) = ق (س). ع (س)

٤- (ق÷ع) (س) = ع(س) ÷ ق(س)





عملية التركيب التوابع:

بفرض لـدينا التـابع ق: د⊇ ح← ح ولـدينا تابعاً آخـر ع: ج ⊇ح←د عندئذ نعرف عملية تركيب التابعين ع. ق ونرمز لها بـ ق ٥ع بالشكل:

(ق٥ع) (س) = ق(ع(س)): ق٥ع: ج ⊇ح←ح.

مثال: إذا كان ق (س) = س^{٢} و ع (س) = س +٣ عندئذ فإن:

(ق٥ع) (س) = ق(ع(س) = ق (س+٣) =(س+٣)^{٢}.

ملاحظة هامة ك أن عملية تركيب تـابعين هـي عمليـة ليـست تبديليـة في الحالة العامة.

تعريف التابع العكسي: بفرض لدينا ق تابعا حقيقـا عندئـذ نعـرف التـابع العكسي لـ ق ونرمز له بـ ق$^{-١}$ حيث (-١) لا تعبر عن الأس ز بالشكل:

ق ٥ق$^{-١}$ (س) = ق$^{-١}$ ٥ق (س) =س

مثال ق (س) = س^{٢} نلاحظ أن ق-١(س) = س ونتأكد من انه:

ق ٥ ق$^{-١}$ = ق (ق$^{-١}$ (س) = ق ($\sqrt{س}$) = $(\sqrt{س})^{٢}$= س

ق$^{-١}$ ٥ ق (س) = ق$^{-١}$ (ق(س))= ق$^{-١}$ (س^{٢}) = $\sqrt{س^{٢}}$= س

ملاحظة هامة: يملك التابع ق تابعا عكسيا وحيدا إذا كان ق تقابلا.

تعريف التابع الزوجي: نقول عن ق انه تابعا زوجيا إذا كان ق (- س) =ق (س)

تعريف التابع الفردي: نقول عن ق انه تابعا فرديا إذا كان ق (- س)=- ق (س).



التوابع المطردة:

تنقسم إلى نوعين أساسيين:

١. التابع المتزايد: نقول عن ق انه تابعا متزايدا إذا كان

∀س١،س٢ >: س١≥س٢ ⇐ ق (س١) ≥ق(س٢)

٢. التابع المتناقص: نقول عن ق انه تابعا متناقصا إذا كان.

∀س١،س٢ >: س١≥س٢ ⇐ ق (س١) ≤ق(س٢)

التوابع المحدودة:

نقول عن التابع ق انه إذا كان ∀ س∋>: | ق (س) | ≥ م

التوابع الدورية:

نقول عن التابع ق انه دوري ودوره ت إذا كان:

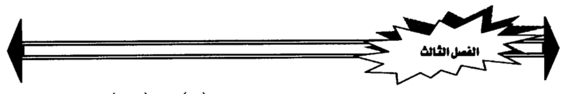
∀س: ق (س + ت) = ق (س)

وحيث ت هو أصغر عدد موجب يحقق العلاقة السابقة س + ت ∋ >

مبرهنة -١-: إن أي تابع حقيقي ق يمكن كتابته كمجموع لتابعين أحدهما زوجيا والأخر فرديا.

البرهان: بملاحظة أن ج١ (س) = $\frac{\text{ق(س)+ق(−س)}}{\text{٢}}$ ولنكتب ق: > ح ←هـ

وس = $\frac{\text{ق(س)+ق(−س)}}{\text{٢}}$



وســـنلاحظ أن $ج_١ \Leftarrow ج_١ (-س) = ق \frac{ق(س)+ق(-س)}{٢} = -ج_١(س)$ زوجياً و $ج_٢ \Leftarrow ج_٢ (-س) = ق \frac{ق(س)+ق(-س)}{٢} = -ج_٢(س)$ فردياً

وإذا نظرنـا إلى ق (س) نجـد أن: ق (س) = $ج_١$ (س) + $ج_٢$ (س) وتمـت المبرهنة.

قاعدة أساسية:

إن جداء تابعا زوجيا بتابع زوجي آخر يعطي تابعا زوجيا.

وجداء تابعا فرديا بتابع فردي آخر يعطي تابعا زوجيا.

وجداء تابعا زوجي بتابع فردي يعطي تابع فردي.

نتيجـة هامـة: إذا كـان ق تابعـا زوجيـا فـإن | ق |، $\propto$. ق ،$ق^٢$ كـلا توابـع زوجية.

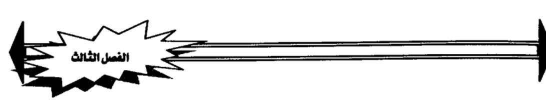
مبرهنة -٢-: إذا كان لدينا ق تابعا دوره $ت_١$ ولدينا تابعا دوريا آخر ج دوره $ت_٢$ فإن:

ق+ج تابع دوري دوره المضاعف المشترك الأصغر لـ $ت_١$ ،$ت_٢$.

ق. ج تابع دوري دوره المضاعف المشترك الأصغر لـ $ت_١$، $ت_٢$.

مبرهنة -٢-: إذا كان ق، ج تابعين محددين فإن:

التوابع التالية تكون محدودة ق. ج، ق+ ج، α. ق



الآن سنورد التوابع الأساسية المعروفة حسب أشكالها الشهيرة:

١- التابع الصحيح من الدرجة (ن): نسمي التابع.

$أ_ن (س) = أ_ن س^ن + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ$.

بأنه تابع صحيح من الدرجة (ن) وتكون مجموعة تعريفه كلها.

٢- التابع الكسري: ويعطي بالصيغة ح (س) = $\frac{أ_ن(س)}{ل_م(س)}$

وذلك بفرض أن (س) تابعا صحيحا من الدرجة (ن)

و لm٩ م (س) تابعا صحيحا من الدرجة (م)

ويكون هذا التابع معرفا على ح ما عدا س التي تجعل المقام لm٩ م (س) = ٠

٣- التابع الأصم - الجذري: نقول عن التابع ل (س) = $\sqrt[ن]{و ح(س)}$ أنه تابعاً جذريا حيث ج (س) و ن؟ ط أما صحيحا أو كسريا. وتكون مجموعة تعريف هذا التابع عندما ن زوجيا هي مجموعة التي يكون فيها ج (س) > ٠ أما عندما تكون ن عددا فرديا فإن مجموعة تعريف هذا التابع تصبح مجموعة تعريف التابع ج (س).

٤- التوابع المثلثية: إن من أهم التوابع المثلثية:

ج (س) = جتا س، ق (س) = جا س وهما معرفان على ح كلها ودوريان ت = ٢π.

ق/ (س) ظا س معرف على ح / { π/٢ + πك } وهو دوري ودوره ت = π.



ق$^{//}$(س) = ظتا س معرف على ح / {πك} وهو دوري ودوره ت = π.

متطابقات وعلاقات شهيرة في التوابع المثلثية:

جا^{2} س + جتا^{2} س = ١

ظا^{2} س + ١ = $\frac{١}{جتا٢س}$ ظتا ٢ س + ١ = $\frac{١}{جا٢س}$

٣- قوانين جميع الزوايا:

جا ($\alpha+\beta$) = جا α. جتا β + جا β. جتا α

جا ($\alpha-\beta$) = جا α. جتا β - جا β. جتا α

جتا ($\alpha+\beta$) = جتا α. جتا β - جا α. جا β

جتا ($\alpha-\beta$) = جتا α. جتا β + جا β. جا β

قوانين تحويل الجداء إلى جمع

جا α. جا β = $\frac{١}{٢}$. [جتا ($\propto-\beta$) − جتا (($\propto+\beta$)]

جتا α. جا β = $\frac{١}{٢}$. [جا ($\propto+\beta$) − جا (($\propto-\beta$)]

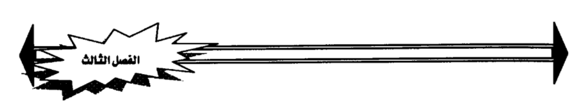
جتا α. جتا β = $\frac{١}{٢}$. [جتا ($\propto+\beta$) + جتا (($\propto-\beta$)]

ملاحظة هامة:

-١ ≤ جتا س ≤ ١ ، -١ ≤ جتا س ≤ ١

التوابع العكسية للتوابع المثلثية:

نسمي التابع العكسي لـ جا س بـ ص= قوس جا س.



نسمي التابع العكسي لـ جتا س بـ ص = قوس جتا س.

نسمي التابع العكسي لـ ظا س بـ ص = قوس ظا س.

نسمي التابع العكسي لـ ظتا س بـ ص = قوس ظتا س.

التابع الأسي: نعرف التابع الأسي بأنه التابع من الشكل ق(س) = أ^س ذو الأساس

(أ) حيث أ ∋ح*/[١] ونقول عن التابع الأسي انه تابع أسي طبيعي إذا كان أ = هـ حيث هـ هو العدد النيبري

هـ = ٢,٧١

ونكتب ق (س) = هـ^س

ويكون هذا التابع معرف دوما على ح

التابع اللوغاريتمي: يكتب بالشكل ق (س) = لو أ س حيث أساسه هو أ أما إذا كان أساسه هو العدد النيبري أ= هـ عندئذ نقول انه لوغارتمياً طبيعيا ويكتب ق (س) = لو هـ (س).

ويكون هذا التابع معرفا عندما يكون ما بداخله اكبر تماما من الصفر.

متطابقات وعلاقات شهيرة في التوابع المثلثية:

$جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١$

$$\frac{١}{جتا^{٢}س} = \frac{١}{جا^{٢} س}$$



٣. قوانين جميع الزوايا:

جا ($\propto + \beta$) = جا $\propto$ × جتا β + جا β × جتا $\propto$

جا ($\propto - \beta$) = جا $\propto$ × جتا β − جا β × جتا $\propto$

جتا ($\propto + \beta$) = جتا $\propto$ × جتا β − جا $\propto$ × جا β

جتا ($\propto - \beta$) = جتا $\propto$ × جتا β + جا β × جا β

٤- قوانين تحويل الجداء إلى الجمع.

جا $\propto$ × جا β = $\frac{١}{٢}$ × [جتا ($\propto - \beta$) − جتا ($\propto + \beta$)]

جتا $\propto$ × جا β = $\frac{١}{٢}$ × [جتا ($\propto + \beta$) − جا ($\propto - \beta$)]

جتا $\propto$ × جا β = $\frac{١}{٢}$ × [جتا ($\propto + \beta$) + جتا ($\propto - \beta$)]

ملاحظة هامة:

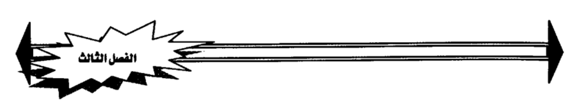
-١ ≥ جتا س ≥ ١ ، -١ ≥ جتا س ≥ ١

التابع الأسي: نعرف التابع الأسي بأنه التابع من الشكل ϑ(س) = أس ذو الأساس أ حيث أ ∋ ح$^{+}$ / {١}

ونقول عن التابع الأسي انه تابع أسي طبيعي إذا كان أ= هـ حيث هـ هو العدد النيبري هـ = ٧١ , ٢ونكتب ϑ(س) = هـ ^{س}

ويكون هذا التابع معرف دوما على ح

التابع اللوغاريمي: يكتب بالشكل ق (س) = لو$_{أ}$س حيث أساسه هو أ أما



إذا كان أساسه هو العدد النيبري م = هـ عندئذ نقول انه لوغاريتميا طبيعيا ويكتب ق (س) = لوهـ ويكون هذا التابع معرفا عندما يكون ما بداخله أكبر تماما من الصفر

ملاحظة: إن التابع اللوغاريمتي هو التابع الأسي للتابع الأسي حيث:

$لو_م م^{س} = س ، م^{لو_م س} = س$

خواص هامة للوغاريتم:

١. لو م + لو ب = لو (م × ب)

٢. لو م – لو ب = لو (م ÷ ب)

٣. $لو م^{ن} = ن × لو م$

٤. $لو م^{\frac{1}{ن}} = \frac{1}{ن} × لو م$

٥. $لو_{هـ} هـ = ١$

٦- $لو_{هـ} ١ = ٠$

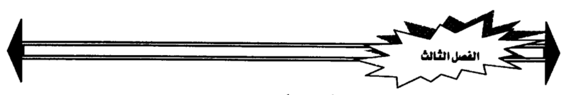
التوابع القطعية:

نعرف التوابع القطعية بناء على التوابع الأسية بالشكل:

١. جا (مقطعي) = $\frac{هـ^{س} - هـ^{-س}}{٢}$ ويسمى الجيب القطعي ويكون معرفا على ح كلها.

٢. جتا (قطعي) = $\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{٢}$ ويسمى الجتا القطعي ويكون معرفا على ح كلها.





٣. ظا (قطعي)= $\frac{\text{جا(قطعي)}}{\text{جتا (قطعي)}}$ ويسمى الظل القطعي ويكون معرفا على ح كلها.

٤. ظتا (قطعي) = $\frac{\text{جتا(قطعي)}}{\text{جا(قطعي)}}$ ويسمى التظل القطعي ويكون معرفا على ح/[٠]. ذلك لأن

علاقات ومتطابقات شهيرة في التوابع القطعية:

١. $\text{جا}^{٢}$ (قطعي) س − $\text{جتا}^{٢}$ (قطعي)$^{\text{س}}$ = ١

٢. $(\text{ظا (قطعي)})\,\text{س}^{٢} - ١ = \frac{١}{(\text{جتا (قطعي)})^{٢}\text{س}}$ ، $(\text{ظتا (قطعي)})^{٢}$ س − ١ = $\frac{١}{(\text{جا (قطعي)})^{٢}\text{س}}$

٣- جا (قطعي) + جتا (قطعي) = $\text{هـ}^{\text{س}}$

٤- قوانين جميع الزوايا:

جا (قطع) (ٲ + ب) = جا (قطع) ٲ جتا (قطع) ب + جتا (قطع) ٲ. جا (قطع) ب.

جا (قطع) (ٲ − ب) = جا (قطع) ٲ جتا (قطع) ب − جتا (قطع) ٲ. جا (قطع) ب.

جتا (قطع) (ٲ + ب) = جتا (قطع) (ٲ) جتا (قطع) ب- جا (قطع) ٲ جا (قطع) ب.



جتا (قطع) (أ - ب) = جتا (قطع) أ جتا (قطع) ب + جا (قطع) أ. جا (قطع) ب.

٥. قوانين تحويل الجداء إلى جمع:

١- جا (قطع) أ. جتا (قطع) ب = ١/٢ [جا (قطع) (أ + ب) + جا (قطع) (أ –ب)]

٢- جا (قطع) أ. جتا (قطع) ب = ١/٢ [جتا (قطع) (أ - ب) – جا (قطع) (أ +ب)]

٣ - جا (قطع) أ. جتا (قطع) ب = ١/٢ [جتا (قطع) (أ + ب) - جتا (قطع) (أ – ب)]

التوابع العكسية للتوابع القطعية:

سنسمي التابع العكسي لـ جا (قطع) س بـ ص = قوس جا (قطع) س ويمكن استنتاجه بالعلاقة ص = قوس جا (قطع) س ⇐ س = جا (قطع) ص

⇐ س = (هـ^ص – هـ^-ص) / ٢

وبفرض هـ^ص = ك ⇐ س = (ك – ١/ك) / ٢ ⇐ ك – ٢س ك – ١ = ٠

وبحل المعادلة الأخيرة بالنسبة لـ ك نجد أن:

ك = (٢س ± √(٤س^٢ + ٤)) / ٢ = س ± √(س^٢ + ١)

⇐ هـ^ص = ± √(س٢ + ١) ⇐ ص = {س ± √(س^٢ + ١)}



ويمكن بنفس الطريقة استنتاج أن:

قوس جتا (قطع) س = لوهـ $\{س \pm \sqrt{س^{٢} - ١}\}$

قوس ظا (قطع) س = $\frac{١}{٢}$ $\left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)$

قوس ظتا (قطع) س = لوهـ $\left(\frac{١}{س} + \frac{\sqrt{١ + س^{٢}}}{|س|}\right)$

وتعود دراسة مجموعة تعريف هذه التوابع إلى توابع أساسية سابقة

قاعدة هامة: إذا كان ق تابعاً معرفاً على المجموعة $ح_{١}$ و ه معرفا على المجموعة $ح_{٢}$ فإن التوابع التالية:

أ- ق ± هـ معرفاً على $ح_{١} \cap ح_{٢}$

ب- ق. هـ معرفاً على $ح_{١} \cap ح_{٢}$

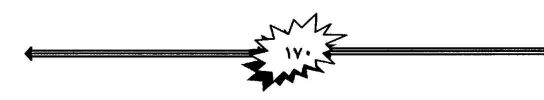
جـ- ق ÷هـ معرفاً على $ح_{١} \cap ح_{٢}$ { س: هـ (س) = ٠ }

د- ق o هـ معرفاً على $ح_{١} \cap ح_{٢}$

ملاحظات هامة على مجموعات التعريف:

١- إن الدراسة السابقة في مجموعات التعريف للتوابع نستخدمها عندما تكون أمام تابع ذو قاعدة ربط وحيدة مثل ق (س) = $س^{٢}$، هـ (س) = جا س أو...

أما عندما تكون تابع معرف بالشكل:



$$ق\ س = \begin{cases} س + ٥ & س \geq ١ \\ ٢س + ٢ & ٠ \leq س \leq ١ \\ ٣س + ١ & س \leq ٠ \end{cases}$$

فإننا لن ندرس في هذه الحالة مجموعة تعريفية كونها معطاة ضمناً في شكل التعريف.

نهايات التوابع:

١- نهاية تابع عند عدد محدود: نلاحظ أنه في بعض التوابع لدى اقتراب س من عدد فإن قيمة التابع تقترب من قيمة معينة محدودة في هذه الحالة نقول أن التابع يملك نهاية محدودة عندما س تربية قرباً كافيا من $س_٠$ ونكتب $نها_{س \to ٠}$ ق (س) = أ حيث أ عدداً حقيقياً محدوداً وتعرف النهاية بالشكل: نقول أن $نها_{س \to ٠}$ ق (س) = أ إذا كان

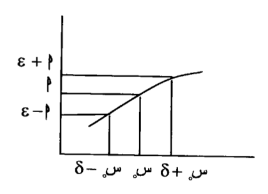
$$\forall \varepsilon > ٠ : \exists\ \delta > ٠ : |س - س_٠| < \delta \Leftarrow |ق(س) - أ| < \varepsilon$$

المعنى الهندسي لنهاية تابع: في الواقع إذا كانت س قريبة من $س_٠$ قرباً كافياً وهذا ما نعبر عنه بـ $|س - س_٠| < \delta \Leftarrow س_٠ - \delta < س < س_٠ + \delta$ فقيمة التابع عند ذلك ستكون قريبة أيضاً من العدد أ و هذا ما عبّرنا عنه بـ $|ق(س) - أ| < \varepsilon$ أي أن $أ - \varepsilon < ق(س) < أ + \varepsilon$

ملاحظة هامة: نلاحظ أن تعريف النهاية للتابع عند س = $س_٠$

لا يشترط تعريف التابع على تلك النقطة





ولـذلك نقـول عـن الرمـز س ← س٠ أن س تـسعى إلى س٠ دون أن تساويها.

مثال: يفرض التابع ق (س) $\frac{1}{س}$ ولندرس نهايته عندما س ← ١ الآن سنلاحظ الجدول.

وبالتالي $\lim_{س \to ١} \frac{١}{س} = ١$

مثال: أوجد نهاية التابع $\frac{١}{س^{٢}+١}$ = ق (س) عندما س ← ٠ سنلاحظ انه

$\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^{٢}+١} = ١$

٢- نهاية تابع اللانهاية: نقول أن ق (س) = ب

$\forall \varepsilon > ٠ : \exists \delta : |س| > \delta \leftarrow |ق(س) - ب| < \varepsilon$

وبالتالي اخترنا المقدار س كبيراً فإن | ق (س) − ب | سوف يكون صغيراً

مثال: أوجد نهاية التابع ق (س) $\frac{٢س^{٢}+١}{س^{٢}+٢}$ عند س ← ∞

$$\text{نها}_{س\to\infty} \; ق\,(س) = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{٢س^{٢}+١}{س^{٢}+٢} = \text{نها}_{س\to\infty} \frac{س^{٢}\left(٢+١/س^{٢}\right)}{س^{٢}\left(١+٢/س^{٢}\right)} = \text{نها}_{س\to\infty} \left[\frac{٢+١/س^{٢}}{١+٢/س^{٢}}\right] = \frac{٢٠+٠}{١+٠} = ٢$$

مثال: أثبت للتابع ق (س) = س نهاية عند أي نقطة سه وتساوي نها $_{س \to \infty}$ ق (س) = سه

الآن بملاحظة أنه حتى يكون نها $_{س \to \infty}$ ق (س) = سه

$$\forall \varepsilon > ٠ : \exists\ \delta\ (\varepsilon) : |\, س - سه \,| < \delta \Leftarrow |\, ق\,(س) - سه \,| < \varepsilon$$

وبملاحظة المقدار | ق (س) – سه | $< \varepsilon \Leftarrow$ | س – سه | $< \varepsilon$

وبالتالي إذا اخترنا المقدار $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ فإن التعريف محققاً وبالتالي: نها $_{س \to \infty}$ ق (س) = سه

ملاحظة هامة: في الواقع عند تطبيق نهاية تابع عند نقطة س ←سه تعريفاً يجب أن نبحث عن علاقة $\delta = \delta(\varepsilon)$ فإذا كانت موجودة تحقق التعريف وإلا فإن التعريف غير محقق.

تعريف النهاية من اليمين: نقول عن التابع ق أنه يملك نهاية عن اليمين مساوية للعدد أ ونكتب نها $_{س \to \infty}$ ق (س) = أ إذا كان $\forall \varepsilon > ٠ : \exists\ \delta\ (\varepsilon)$: س – سه $< \delta \Leftarrow$ | ق (س) – أ | $< \varepsilon$

ونسمي هذه النهاية نهاية التابع ق عند النقطة سه عندما تسعى س إلى سه بقيم أكبر منها أي أن

س $\in$ [سه، سه $+ \delta$]





مثال: اوجد النهاية من اليمين للتابع المعرف بالشكل:

$$ق(س) = \begin{bmatrix} -س+١ & س \leq ٢ \\ ٣س+١ & س > ٢ \end{bmatrix}$$

وذلك عند النقطة س = ٢

الحل:

$$نها_{س \to \infty} ق(س) = نها_{س \to \infty} -س + ١ = ٢ + ١ = -١$$

تعريف النهاية من اليسار: نقول عن التابع ق أنه يملك نهاية من اليسار مساوية للعدد ب إذا كان:

$$\forall \varepsilon > ٠ : \exists \; \delta(\varepsilon) :- \delta < س - س_٠ \to |ق(س) - ب| < \varepsilon$$

ونسمي هذه النهاية نهاية التابع ق عند النقطة س٠ عندما تسعة س إلى س٠ بقيم أصغر منها أي أن س $\in$ [س٠ - δ، س٠]

مثال: أوجد نهاية التابع المعرف من المثال السابق عند النقطة س = ٢ من اليسار

الحل:

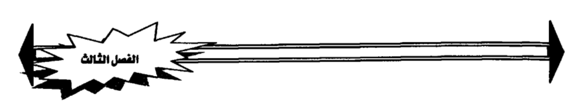
$$نها_{س \to ٢^{>}} ق(س) = نها_{س \to ٢} ٣س+١ = ٦+١ = ٧$$

ملاحظة هامة: تكون نهاية تابع ما ق موجودة عند س٠ إذا كانت نهايته من اليمين موجودة ونهايته من اليسار موجودة ومتساويتان.

أي أن:

١- $نها_{س \to ٢^{<}} ق(س) = أ$





٢- $\lim_{س \to ٢^{<}}$ ق (س) = ب

٣- $\lim_{س \to ٢^{<}}$ ق (س) = ﺃ =ب

ونقول عن التابع ق أنه لا يملك نهاية عند س ← سہ إذا لم يتحقق إحدى الشروط السابقة أو كانت

$\lim_{س \to سہ}$ ق (س) = ∞ وعندها أيضاً نقول أن التابع متباعداً عند س ← سہ .

مثال: أوجد نهاية التابع ق (س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤}$

الحل:

بملاحظة أن هذا التابع معرفا على المجموعة [- ∞، -]

[∪] ٢ن ∞] عندئذ يمكن اخذ نهاية هذا التابع عند س ← ٢ من اليمين فقط ونكتب $\lim_{س \to ٢} \sqrt{س^{٢} - ٤} = ٠$

تعريف نهاية التابع اعتمادا على المتتاليات:

نقول أن ق (س) يملك نهاية عندما س←سہ ومساوية للعدد أ ونكتب $\lim_{س \to ٠}$ ق (س) = ﺃ إذا كانت كل متتالية { ﺃ ن } متقاربة نحو العدد سہ ستعطينا متتالية جديدة هي { ق (ﺃ ن) } حيث $\lim_{س \to سہ}$ ق (ﺃ ن) = ﺃ

ملاحظة: نستفيد من التعريف السابق للنهاية في إثبات عدم وجود نهاية أكثر منه في إثبات وجودها ذلك أنه إذا وجدنا متتالية ﺃن ← سہ بحيث أن ق





$\lim_{ن\to\infty}$ (أ$_ن$) $\not\to$ أ فلذلك يجزم لنا بأن التابع ليس له نهاية عند س$_0$.

تعريف النهاية من اليمين اعتماداً على المتتاليات:

نقول أن التابع ق (س) يملك نهاية عند س←س$_0$ من اليمين ونكتب نها$_{س\to س_0^+}$ إذا كانت متتالية متناقصة {أ$_ن$} تسعى إلى العدد أ$_ن$←س$_0$ تعطي أن نها$_{ن\to\infty}$ ق(أ$_ن$) حيث { ق (أ$_ن$) } متتالية .

تعريف النهاية من اليسار اعتماداً على المتتاليات:

نقول ف أن التابع ق (س) يملك نهاية عندما س ← س$_0$ من اليسار ونكتب نها$_{س\to س_0^-}$ ى(س) = ب إذا كانت متتالية متزايدة{ أ$_ن$ } تسعى إلى العدد س$_0$: أ$_ن$ ←س$_0$: س$_0$ تعطي أن نها$_س$ ← ∞ق (أ$_ن$) = أ حيث { ق (أ$_ن$) } متتالية.

تعطي نها$_ن$ ← ∞ ق (أ$_ن$) =ب حيث { ق (ن (أ$_ن$) } متتالية.

مثال: برهن عدم وجود نهاية للتابع ق (س) = جا س عند س ← ∞

الحل: الآن باختيار أ$_ن$ = ن Π وملاحظة أن نها$_س$ ← ∞ أ$_ن$ = ∞ وتشكيل المتتالية:

نها$_ن$ ← ∞ ق (أ$_ن$) = نها$_ن$ ← ∞ جا ن Π = نها$_ن$ ← ∞ = ٠

وباختيار أيضاً ب$_ن$ = π وملاحظة أن نها$_س$ ← ∞ ب$_ن$ = ∞ وتشكيل المتتالية:





$\lim\limits_{ن\to\infty}$ ق (أ ن) = $\lim\limits_{ن\to\infty}$ جا ن π = $\lim\limits_{ن\to\infty}$ ٠ = ٠

وباختيار أيضاً ب ن= ن $\frac{\pi}{2}$ وملاحظة ان $\lim\limits_{ن\to\infty}$ ب ن = ∞ المتتالية:

$\lim\limits_{ن\to\infty}$ ق (ب ن) = $\lim\limits_{ن\to\infty}$ جا ٢π + $\frac{\pi^2}{2}$ = $\lim\limits_{ن\to\infty}$ $(-1)^{ن}$

والنهاية الأخيرة غير موجودة.

عندئذ فإن التابع ق (س) = جا س لا يملك نهاية عند س س $\leftarrow \infty$

خواص النهايات:

إذا كان لدينا نها $_{س \to س_٠}$ ق (س) = أ و نها $_{س \to س_٠}$ ق (س) = ب عندئذ فإن

١- $\lim\limits_{س\to س_٠}$ قَ ± هـ (س) = $\lim\limits_{س\to س_٠}$ ق ± $\lim\limits_{س\to س_٠}$ هـ (س

٢- $\lim\limits_{س\to س_٠}$ ق. هـ (س) = $\lim\limits_{س\to س_٠}$ ق(س) × $\lim\limits_{س\to س_٠}$ هـ (س)

٣ - $\lim\limits_{س\to س_٠}$ $\frac{ق}{هـ}$(س) = $\dfrac{\lim\limits_{س\to س_٠} ق(س)}{\lim\limits_{س\to س_٠} هـ(س)}$

٤- $\lim\limits_{س\to س_٠}$ $[ق (س)]^{ن}$ ± = $[\lim\limits_{س\to س_٠} ق (س)]^{ن}$

٥ - $\lim\limits_{س\to س_٠}$ α. $\lim\limits_{س\to س_٠}$ ق(س) = $\propto$ $\lim\limits_{س\to س_٠}$ ق(س)

البرهان: إذا كانت $\lim\limits_{س\to س_٠}$ ق (س) = أ فإنه من أجل أي متتالية أ ن ← س٠ فإن نها $\lim\limits_{س\to س_٠}$ هـ (س) = ب وأيضاً $\lim\limits_{س\to س_٠}$ ق (س) = أ فإنه من أجل أي متتالية أ ن ← س٠ فإن $\lim\limits_{س\to س_٠}$ هـ (س) = ب وبالتالي وفق هذه المناقشة

تنتقل إلى خواص النهايات الخاصة بالمتتاليات العددية والمذكورة في الفصل الأول ص وبالتالي نهـا $_{س \to \infty}$ (ق $\mp$ هـ) $= \underset{س \to س_0}{\text{نها}}$ (أ $_{ن}$) $\mp \underset{س \to س_0}{\text{نها}}$ هـ (أ $_{ن}$) حسب تعريف النهاية السابق.

وبنفس الطريقة يمكن برهان على أن الخواص ٢- ٣- ٤-٥ صحيحة الأمر الذي نتركه للقارئ.

تمارين على النهايات:

١- $\text{ق (س)} = \dfrac{\text{٣س}^{٢} - \text{٨س}}{\text{٥س} + \text{٣س}}$. عندما س $\to$ ٢ و س $\to$ ٠ و س $\to \infty$

٢- $\text{ق (س)} = \dfrac{\sqrt{\text{س}} - ٢}{\sqrt{\text{س}} + ٢}$. عندما س $\to \infty$ و س $\to$ ٠

٣- $\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{س} < ١ \\ \text{س} + ٢ & \text{س} \geq ١ \end{cases}$ عندما س $\to$ ١

الحل:

١- $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{٣س}^{٢} - \text{٨س}}{\text{٥س} + \text{٣س}} = \dfrac{٣.(٢)^{٢} - ٨.(٢)}{٥.(٢)^{٢} + ٣(٢)} = \dfrac{-١}{١٣}$

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٣ س}^{٢} - \text{٨ س}}{\text{٥ س} + \text{٣ س}} = \dfrac{٠}{٠}$$

أيضاً هذه الحالة عدم تعيين يلزم إزالتها.

$$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٣س}^{٢} - \text{٨س}}{\text{٥س} + \text{٣س}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}[\text{٣س} - ٨]}{\text{س}[\text{٥س} + ٣]} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{٣س} - ٨}{\text{٥س} + ٣} = \dfrac{-٨}{٣}$$

٢- بملاحظة أن $\lim\limits_{س\to ∞} \frac{-2}{+2} = \frac{∞}{∞}$ وهي حالة عدم تعيين يلزم إزالتها.

$$\lim\limits_{س\to ∞} \frac{\sqrt{س}-2}{\sqrt{س}-2} \times \frac{\left(\sqrt{س}-2\right)^2}{\sqrt{س}-4} = \lim\limits_{س\to ∞} \frac{س\sqrt{س}-4}{س-4} = \lim\limits_{س\to ∞} \frac{س\left[1-\frac{4}{س}-\frac{4}{س}\right]}{س\left[1-\frac{4}{س}\right]} =$$

$$\lim\limits_{س\to ∞} \frac{1-\frac{4}{\sqrt{س}}-\frac{4}{س}}{1-\frac{4}{س}} = 1$$

الآن من أجل $\lim\limits_{س\to 4} \frac{\sqrt{س}-2}{\sqrt{س}+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

الآن لحساب النهاية $\lim\limits_{س\to 1}$ ق (س)

سنلاحظ أن هذا التابع معرفاً قبل س = ١ بشكل وبعد س = ١ بشكل آخر لذلك لابد من حساب النهاية من اليمين ومن اليسار لهذا التابع.

٣- الآن لحساب النهاية س ← ١ ق (س).

سنلاحظ أن هذا التابع معرفا قبل س=١ بشكل وبعد س =١ آخر لذلك لا بد من حساب النهاية من اليمين ومن اليسار لهذا التابع.

$\lim\limits_{\overset{<}{س\to 1}}$ ق (س) = $\lim\limits_{س\to 1}$ س+٢=٣ ، $\lim\limits_{\overset{>}{س\to 1}}$ ق (س) = $\lim\limits_{س\to 1}$ $س^2$=١

وبملاحظة أن $\lim\limits_{\overset{<}{س\to 1}} \neq \lim\limits_{\overset{>}{س\to 1}}$ وبالتالي فإن هذا التابع لا يملك نهاية عند س= ١

مثال: ادرس النهاية $\lim\limits_{س\to -1} |س + 1|$ واحسب قيمتها.



بملاحظة أن | س + ١ | = { س + ١ ، س≥-١ ؛ -س+-١ ، س≤-١ }

ولدراسة هذه النهاية لا بد من دراستها من اليسار واليمين كون س = -١ نقطة تغيير تعريف لهذا التابع إذن أولا: نها س←-١ |س+١| = نها س←-١ س+١=٠

ثانيـــــاً: نها س←-١ |س+١| = نها س←-١ س-١=٠ وبالتـــــالي نها س←-١ |س+١| = نها س←-١ |س+١|

وهذا يؤدي إلى أن نها س←-١ |س+١| =٠

الاستمرار والاتصال:

تعريف: نقول عن التابع ق أنه مستمر - متصل عن ج نقطة مثل س٠ إذا كـــــــــان $\forall \mathcal{E} >$ ٠ : $\exists \delta : \delta (\mathcal{E})$ ٠ | س - - س٠ | $< \delta \Leftarrow$ | ق (س) - ق - س٠) | $< \mathcal{E}$.

ومعنى التعريف أنه باقتران قيمة س من س٠ قرباً كافياً فإن التابع سيقترب من قيمته عند س٠ وهذه يعني تعريفاً أن نها س ← س٠ ق (س٠).

إن هـذا التعريـف يعطينـا وفقـاً لـشروط وجـود النهايـة ثلاثـة شـروط للاستمرار هي:

١- أن يكـون للتـابع ق (س) نهايـة مـن الـيمين عنـد س٠ ونهايـة مـن اليسار عند س٠.





أي إن $\lim_{س\to س_{\circ}^{>}}$ ق(س) ، $\lim_{س\to س_{\circ}^{<}}$ = ق (س) موجودتان ومحدودتان.

٢- أن تكون النهايتان السابقتان متساويتان

$\lim_{س\to س_{\circ}}$ = $\lim_{س\to س_{\circ}^{>}}$ = $\lim_{س\to س_{\circ}^{<}}$ ق(س)

٣- أن تكون نهاية التابع $\lim_{س\to س_{\circ}}$ ق=ق(س。) مساوية لقيمة التابع عند س。 أي ان $\lim_{س\to س_{\circ}}$ ق(س)=ق(س。)

مثال: برهن أن التابع ق (س) = $س^{٢}$ مستمر عند النقطة س = ١

الحل: بملاحظة ق (١) = ١ عندئذ بكتابة الشرط: $\forall\varepsilon>\cdot:\exists\delta:\delta(\varepsilon)$

| س -١ | $<\delta \Leftarrow$ | ق (س) - ق (١) | $<\varepsilon$

| $س^{٢}$ -١ | $<\varepsilon \Leftarrow$ | س - ١ (س + ١) | $<\varepsilon$

| س -١ | $\Leftarrow$ ٠ | س + ١ | $<$٢ ٠ ε

| س -١ | $<\delta$، | س + ١ | $<$ ٢

والآن باختيار $\delta = \frac{\varepsilon}{٢}$ يكون تعريف الاستمرار محققاً و ق (س) = $س^{٢}$ مستمراً عند س =١.

الاستمرار على مجال: نقول أن ق تابعاً مستمراً على مجال [ﺃ، ب] إذا كان مستمراً على كل نقطة من هذا المجال.

لقد عرّفنا فيما سبق النهاية من اليمين والنهاية من اليسار. نستطيع الآن تعريف الاستمرار من اليمين ومن اليسار بناءً على ذلك بالشكل:

١- الاستمرار من اليمين: نقول أن ق تابعاً مستمراً على $س_٠$ من اليمين إذا كانت نهايته - أي التابع - من اليمين موجودة ومساوية لقيمة التابع عند $س_٠$ أي أن:

$\forall \mathcal{E} > ٠ : \exists \delta : \delta (\mathcal{E})$. س - $س_٠ < \delta \Leftarrow$ | ق (س) - ق ($س_٠$) |

ونكتب الشرط $\lim_{س \to س_٠^{<}}$ ق (س) = ق ($س_٠$)

٢- الاستمرار من اليسار: نقول أن ق تابعاً مستمراً من اليسار إذا كانت نهايته – أي التابع – من اليسار موجودة ومساوية لقيمة التابع عند $س_٠$ أي أنه $\forall \mathcal{E} > ٠ : \exists \delta : \delta (\mathcal{E})$ س - $س_٠ < \delta \Leftarrow$ | ق (س) - ق ($س_٠$) | $< \mathcal{E}$ ونكتب الشرط $\lim_{س \to س_٠^{>}}$ ق (س) = ق ($س_٠$) .

نورد أخيراً شرط استمرار التابع بناءً على مفهومي الاستمرار من اليمين والاستمرار من اليسار ونقول إن الشرط اللازم والكافي ليكون ق مستمراً عند $س_٠$ هو أن يكون مستمراً من اليمين ومن اليسار.

تعريف: نقول أن النقطة $س_٠$ نقطة انقطاع للتابع ق إذا كان ق غير مستمراً عند $س_٠$.

تمهيد وملاحظة: بملاحظة شروط الاستمرار رقم فإننا يمكن أن نصنف نقاط الانقطاع وفق نوعين أساسين:

١- نقطة الانقطاع من النوع الأول: هي النقطة التي يكون عدم استمرار التابع عندها ناتجاً من الإخلال بالشرط الثالث. أي أنه توجد للتابع ق



عندها نهاية محدودة لكنها لا تساوي قيمة التابع عند النقطة س٠ ونكتب نها
نها(س ← س٠) ق (س) ≠ ق (س٠) أو أن التابع غير معرف عند س٠.

وتسمى هذه النقطة "نقطة انقطاع قابلة للإزالة" وذلك لأنه بسهولة يمكن إعادة تعريف ق على س٠ بحيث يكون نها(س ← س٠) ق (س) ق (س٠) وتصبح عندئذ س٠ نقطة استمرار وليست نقطة انقطاع.

مثال: ادرس استمرار التابع عند س= ١

ق(س) = { ٢س+١   س < ١ ؛ ٤   س = ١ ؛ ٥س − ٢   س > ١ }

الحل: بملاحظة أن التابع يتغير تعريف حول النقطة س= ١ لذلك سنقوم بإيجاد النهاية من اليمين ومن اليسار للتابع.

من اليسار نها(س ← س٠⁻) ق(س) = نها(س ← ١) ٢س+١ = ٣

من اليمين نها(س ← س٠⁺) ق(س) = نها(س ← ١) ٥س+٢ = ٣

مما سبق نجد أن نها(س ← ١) ق(س) = نها(س ← س٠⁺) ق(س) = نها(س ← س١⁻) ق(س) = ٣

لكن نجد أن نها(س ← ١) ق (س) = نها(س ← س٠⁺) ق (س) = نها(س ← ١⁻) ق (س) = ٣

لكن نجد أن نها(س ← ١) ق (س) = ٣ ≠ ٤ ق (١)

لذلك نقول أن س =١ نقطة انقطاع من النوع الأول "قابلة للإزالة" الآن إذا عرفنا التابع من جديد بالشكل



ق(س) = { ٢س + ١   س < ١ ؛ ٤   س = ١ ؛ ٥س − ٢   س > ١ }

نجد أن مستمر عند س = ١

٢- نقطة الانقطاع من النوع الثاني "غير قابلة للإزالة".

نقول أن س٠ هي نقطة انقطاع من النوع الثاني إذا كان عدم استمرار التابع عندها يتبع من الإخلال بالشرط الأول أو الثاني أي أنه إما إحدى النهايات "من اليمين أو من اليسار" غير موجودة.

أو أن كلاهما موجودتان ولكن غير متساويتان.

مثال: ق(س) = { ٢س + ١   س ≤ ٢ ؛ ٥س − ٢   س > ٢ }   **ادرس استمرار ق عند س = ٢**

الحل: بملاحظة أن نها (س ← س٠ من اليسار) ق(س) = نها (س ← ٢) ٢س + ١ = ٢ × ٢ + ١ = ٥

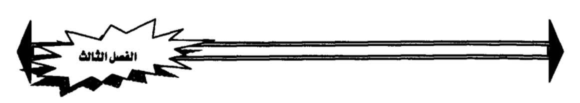
أيضاً لدينا نها (س ← ٢ من اليسار) ٣س + ٥ = ٣ × ٢ + ٥ = ١١

نجد أن نها (س ← ٢ من اليسار) ق(س) ≠ نها (س ← ٢ من اليمين) ق(س) **بالتالي س = ٢ نقطع انقطاع من النوع الثاني "غير قابلة للإزالة"**

خواص الاستمرار:

إذا كان ق، هـ تابعان مستمران فإن:

١- ق + هـ   ٢- ق − هـ   ٣- ق•هـ



٤- ق ÷ هـ : هـ ≠ ٠ كلها توابع مستمرة

٥- |ق| ٦- ق ٢ ٧- ∝.ق

إن برهان هذه الخواص ينتج مباشرة من كتابه شرط الاستمرار والمبرهنة (خواص النهايات)

ملاحظة هامة: إن تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

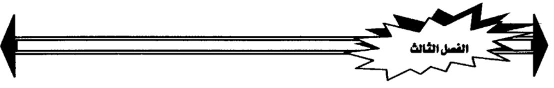
مبرهنة: إذا كان ق تابعاً مستمراً على [ا، ب] فإن ق يأخذ جميع القيم على هذا المجال وبمعنى أوضح سيعطي ق صور جميع العناصر الموجودة في المجال [ا، ب].

أي أنه من أجل ص من الصورة المباشرة لـ [ا، ب] تضمن وجود س بحيث ق (س) =ص.

نتيجة: إذا كان ق مستمراً على مجال [ا، ب] بحيث ا، ب من إشارتين مختلفتين فإنه يوجد جـ ∈ [ا، ب] بحيث ق (جـ) = ٠ وهذه النتيجة لها تطبيقات مختلفة في حل معادلات جبرية.

مجموعة استمرار التابع: نقول عن مجموعة جميع نقاط الاستمرار للتابع ق بأنها مجموعة استمرار التابع.

ومن ملاحظة انه حتى يكون التابع مستمراً يجب أن يكون معرفاً عند تلك النقطة وهذا ينتج من الشرط الثالث من شروط الاستمرار وبالتالي فإن مجموعة الاستمرار هي مجموعة جزئية من مجموعة التعريف.



مفهوم الاستمرار القطعي على مجال: نقول أن ق مستمراً قطعياً أو تقطيعاً على مجال [ﻢ، ب] إذا كان مستمراً على كامل المجال ما عدا عدداً منتهياً من النقاط مثل س١، س ٢ ،......، سن وعندها يمكن كتابة الشكل [ﻢ، ب] = [ﻢ، س١] ∪ [س١، س٢].... ∪ [س ن، ب]

حيث التابع ق مستمراً على كل مجال [س ر، س ر + ١] ولهذا السبب نسميه استمراراً قطعياً أي أنه مستمر على مجالات متقطعة.

استخدام مفهوم الاستمرار في حساب النهايات: إذا كان التابع ق مستمر على نقطة فإن نهاس←س٠ ق(س) = ق(س٠) بالتالي يكفي لحساب نهاية تابع مستمر عند نقطة س٠ بالتابع.

الاشتقاق والتفاضل

تعريف: إذ كان لدينا التابع ق المستمر عند النقطة عندئذ سوف نعرّف المشتق الأول لهذا التابع ونرمزه قَ(س) أو $\frac{دق}{دس}$ ونكتب

$$ق'_س(س_٠) = نها_{هـ \to ٠} \frac{ق(س_٠+هـ) - ق(س_٠)}{هـ}$$

حيث قَس (س٠) هو قيمة المشتق الأول للتابع ق عند النقطة س٠ وهو المقدار العددي أما لإيجاد قاعدة عامة لـ قَس فإننا سنضع بدلاً من (س٠) الثابت. المتحول (س) وعندها تصبح.

$$ق'_س(س_٠) = نها_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

مناقشة عامة: لقد برز مفهوم المشتق في القرن السابع عشر على يد الرياضي الكبير إسحاق نيوتن وقد دعت الحاجة عندئذ إلى حساب ما يسمى السرعة اللحظية للجسم حيث كانت عندئذ معروفة لديهم فقط السرعة الوسطى وهذه تعرّف بأنه نسبة التغيير في المسافة على التغير في الزمن أ ي ع = $\frac{\Delta ق}{\Delta ز}$ ولكن أحداً عندها لم يكن قادراً على معرفة سرعة الجسم في لحظة واحدة وليس في مجال زمني لذلك فكر نيوتن بإنهاء التغيير في الزمن $\Delta_{ز}$ إلى الصفر فكرته لاقت في بادئ الأمر معارضة شديدة حيث من المعلوم أن القسمة على صفر غير معرّفة لكنه رغم ذلك أثبت أن هذه النهاية يمكن حسابها و أخيراً وصل إلى مفهوم وقاعدة المشتق الأول.

$$ق'_{س}(س) = نها_{\Delta س \to} \frac{\Delta ق}{\Delta س} = نها_{\Delta س \to} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{\Delta س}$$

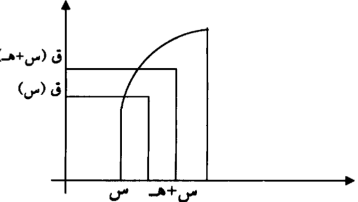
والتي يمكن اعتماد الصيغة فيها $ق'_{س}(س) = نها_{\Delta س \to} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

وهو الدستور المذكور أعلاه.

المعنى الهندسي للمشتق:

بملاحظة الشكل: لدينا النقطتين س، س + هـ و التابع ق المعرف على المجال وبملاحظة أن النقطتين (س، ق (س)) و (س + هـ ق (س + هـ) يعينان مستقيماً يمكن حساب ميله بالشكل:





$$\text{م} = \text{نها}_{\text{هـ}\to 0} \frac{\text{ق(س + هـ) − ق(س)}}{\text{س + هـ − س}} = \frac{\text{ق(س − هـ) − ق(س)}}{\text{هـ}}$$

والآن بجعل هـ ← ٠ فإن النقطة س + هـ ستسعى إلى س وستقرب منها قرباً كافياً حتى نصل إلى أن المستقيم بينهما سيصبح مماساً للتابع عند س. وبالتالي م سيصبح عندها معبراً عن ميل المماس عند تلك النقطة.

التفاضل العام:

إذا أمكن كتابة التغير بالتابع ق بالشكل:

ق (س+ هـ) − ق (س) = أ. هـ + μ (هـ) حيث أ عدداً محدود أ و μ (هـ) تابعاً لـ هـ بحيث أن نهاهـ ← ٠ μ (هـ) = ٠عندئذ يمكن القول بان ق قابلاً للمفاضلة وفق س ونكتب

ق = ق (س + هـ) − ق (س) = أ. هـ + μ (هـ) و أ تصبح هي المشتق الأول عند س.



وملاحظة تمهيد: نلاحظ أن تعريف المشتق اعتمد أساساً على مفهوم النهايات لذلك فإنه يمكن تقسيم المشتق إلى نوعين أساسين هما:

١- المشتق اليمين: نقول أن ق قابلاً للاشتقاق من اليمين عند س إذا كان المقدار $\frac{ق(س-هـ)-ق(س)}{هـ}=ص(س،هـ)$

يملك نهاية من اليمين عندما هـ ← ٠ ونكتب: يمين

$ق_{س}^{/}(س)=نها_{هـ←٠}\frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$

٢- المشتق من اليسار: نقول أن ق قابلاً للاشتقاق من اليسار عند س إذا كان المقدار $ص(س،هـ)=\frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$

يملك نهاية من اليسار عندما هـ←٠ ونكتب: يسار

$ق_{س}^{/}(س_{٠})=نها_{هـ←٠}\frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$

وأخيراً يكون الشرط اللازم والكافي لوجود مشتق للتابع ق هو موجود مشتق من يمين التابع ومشتق يسار وأن يكونا متساويان أي أن يمين قَ = يسار قَ

خواص الاشتقاق: إذا كان كلاً من ق، ك قابلين للاشتقاق عندئذٍ فإن

١- ق + ك قابل للاشتقاق و (ق + ك) قَ + كَ

البرهان: بملاحظة المقدار $\frac{ق+ك(س+هـ)-ق+ك(س)}{هـ}$

$=\frac{ق(س+هـ)+ك(س+هـ)-ق(س)-ك(س)}{هـ}=\frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}+\frac{ك(س+هـ)-ك(س)}{هـ}$

والآن بأخذ نهاية طرفي العلاقة عندما هـ ← ٠ نجد أن

$$(ق+ك)'(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق+ك(س+هـ) - ق+ك(س)}{هـ}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} + \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ك(س+هـ) - ك(س)}{هـ} = ق'(س) + ك'(س)$$

٢- سنناقش نفس المناقشة بالنسبة (ق − ك) (س) = قَ (س) − كَ (س)

٣- أن ق. ك قابل للاشتقاق و [ق. ك]َ = قَ. ك + ق. كَ

البرهان: بملاحظة أن:

$$(ق.ك(س))' = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق.ك(س+هـ) - ق(س).ك(س)}{هـ} + \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(س+هـ).ك(س+هـ) - ق(س).ك(س)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(س+هـ).ك(س+هـ) - ق(س).ك(س) + ق(س+هـ).ك(س) - ق(س+هـ).ك(س)}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} ك(س) \left[\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}\right] + \underset{س \leftarrow ٠}{نها} ق(س). \left[\frac{ك(س+هـ) - ك(س)}{هـ}\right]$$

$$= ك(س).\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} + ق(س).\underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= ك(س).ق'(س) + ق(س).ك'(س) \Leftarrow (ق.ك)' = ق'.ك + ق.ك'$$

٤- إن $\frac{ق}{ك}$ قابل للاشتقاق و $\left(\frac{ق}{ك}\right)' = \frac{ق'.ك - ق.ك'}{ك^{٢}}$

$$\left(\frac{ق}{ك}\right)'(س) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{\frac{ق}{ك}(س+هـ) - \frac{ق}{ك}(س)}{هـ} - \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{\frac{ق(س+هـ)}{ك(س+هـ)} - \frac{ق(س)}{ك(س)}}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{\frac{ق(س+هـ).ك(س) - ق(س).ك(س+هـ)}{ك(س).ك(س+هـ)}}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نها} \frac{ق(س+هـ).ك(س) - ق(س)ك(س+هـ)}{هـ.ك(س).ك(س+هـ)}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ).ك(س) - ق(س).ك(س+هـ) + ق(س+هـ).ك(س+هـ) - ق(س+هـ).ك(س+هـ)}{هـ.ك(س).ك(س+هـ)}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{1}{ك(س).ك(س+هـ)} . \left[\lim_{هـ \to 0} ك(س+هـ) \left[\frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} \right] - \lim_{هـ \to 0} ق(س+هـ) . \left[\frac{ك(س+هـ) - ك(س)}{هـ} \right] \right]$$

$$= \frac{1}{ك^{2}(س)} . \left[ق'.ك(س) - ق.ك'(س) \right] = \frac{ق'(س).ك(س) - ق(س).ك'(س)}{ك^{2}(س)}$$

$$\Leftarrow \left(\frac{ق}{ك} \right)' = \frac{ق'.ك - ق.ك'}{ك^{2}}$$

سنبدأ الآن بحساب المشتق للتوابع الأساسية:

أولاً: التابع الثابت: ويعرف بالشكل $ق(س) = م$ حيث $م \in ح$ نلاحظ أن:

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{م - م}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{0}{هـ} = 0$$

ثانياً: التابع الصحيح: من الشكل $ق(س) = س^{ن}$ ق نلاحظ أن:

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{(س+هـ)^{ن} - س^{ن}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{س^{ن} + هـ.س^{ن-1}.هـ + \frac{ن(س-1)}{2} هـ^{2} س^{ن-2} + \dots + هـ^{ن} - س^{ن}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} ن س^{ن-1} + \frac{ن(ن-1)}{2} . هـ^{2} . س^{ن-2} + \dots = ن.س^{ن-1}$$

مجموعة هذه الحدود ستحوي هـ $\Leftarrow (س^{ن})' = ن.س^{ن-1}$

ملاحظة: إن المناقشة السابقة والقاعدة يصحان من أجل ن ∍ ك

ثالثاً: التوابع المثلثية

١- بالنسبة لـ ق (س) = جا س نلاحظ أن:

$$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{جا(س+هـ) - جاس}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{جاس \cdot جتاهـ + جاهـ \cdot جتاس - جاس}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0} \frac{جاس \cdot جتاهـ}{هـ} + \lim_{هـ \to 0} \frac{جاهـ}{هـ} \cdot جتاس - \frac{جاس}{هـ}$$

وبملاحظة أن:

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{جاهـ}{هـ} = ١ \quad ، \lim_{هـ \to 0} \frac{جتاهـ - ١}{هـ} = ٠$$

نجد أن: $ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{جتاهـ - ١}{هـ} \cdot جاس + \lim_{هـ \to 0} \frac{جاهـ}{هـ} \cdot جتاس$

$$= ٠ \cdot (جاس) + ١ \cdot جتاس = جتاس$$

٢- بطريقة مشابهة تماماً لما سبق نثبت أن (جتا س)′ = - جا س

٣- من أجل ق (س) = ظا س نلاحظ أن:

$$ق'(س) = (ظاس)' = \left(\frac{جاس}{جتاس}\right)' = \frac{جا^2س + جتا^2س}{جتا^2س}$$

$$\frac{١}{جتا^2س} \Leftarrow (ظاس)' = \frac{١}{جتا^2س}$$

٤- بنفس طريقة - ٣- نثبت أن $(ظتاس)' = \frac{-١}{جا^2س}$

رابعاً: التابع الأسي الطبيعي $ق(س) = هـ^{س}$

لقد برهنا في فصل النهايات أن: $\lim_{ن \to \infty} \left(1 + \frac{1}{ن}\right)^{ن} = هـ$

$$\Leftarrow \lim_{ن \to \infty} \left(1 + \frac{س}{ن}\right)^{ن} هـ^{س}$$

وحسب منشور الكرمني يمكن كتابة:

$$\lim_{ن \to \infty} \left(1 + \frac{1}{ن}\right) = \lim_{هـ \to} \frac{س^{ن}}{ن!}$$

$$\Leftarrow هـ^{س} = \frac{س^{ن}}{ن!} \Leftarrow \left(هـ^{س}\right)' = \frac{ن - س^{ن-1}}{ن!} = \frac{س^{ن}}{ن!} \Leftarrow \left(هـ^{ن}\right) = هـ^{س}$$

خامساً: التابع اللوغاريتمي الطبيعي $ق(س) = لو_{هـ} س$

نلاحظ أنه من أجل $ص = لو س = لو_{هـ} س \Rightarrow س = هـ^{ص} = \frac{دس}{دص}$

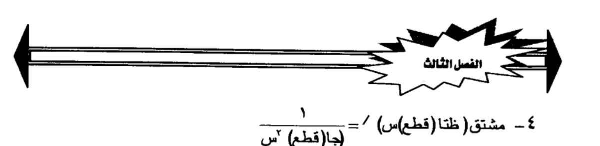
وبالتالي نحصل على $\frac{دس}{دص} = \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{1}{س} \Leftarrow ق'(س) = \frac{1}{س}$

سادساً: التوابع القطعية

١- لإيجاد مشتق جا (قطع) س نتبع نفس الطريقة التي اتبعناها لحساب مشتق ق (س) = جا س فنجد أن (جا (قطع) س)´ = جتا (قطع) س

٢- ومشتق (جتا (مقطع) س) = جا (قطع) س

٣- ومشتق ظا (قطع)س)$' = \frac{1}{(جتا(قطع))^{2} س} = (ظا(قطع))^{2} س - 1$



٤ـ $\text{مشتق}(\text{ظتا}(\text{قطع})\text{س})' = \dfrac{١}{\text{جا}(\text{قطع})^{٢}\text{س}}$

سابعاً: اشتقاق التوابع العكسية للتوابع المثلثية:

الآن من أجل ص = قوس جا س نجد أن س = جا ص

$$\Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \text{جتا ص} = \sqrt{\text{جا}^{٢}\text{ص}} = \sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$$

$$\Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}} \Leftarrow (\text{وترجا س})' = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$(\text{قوس جتا س})' = \frac{-١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}} ،(\text{قوس ظا س})' = \frac{١}{١ + \text{س}^{٢}}$$

ثامناً: اشتقاق التوابع العكسية لتوابع القطعية:

أولاً من أجل ص = قوس جا (قطع) س نجد أنس = جا (قطع) ص

$$\Leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \text{جتا}(\text{قطع})\text{ص} = \sqrt{\text{جا}(\text{قطع})^{٢} - ١} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}} \Leftarrow (\text{قوس جا}(\text{قطع})\text{س})' = \frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$$

وبنفس الطريقة السابقة نثبت أن:

$$(\text{قوس جتا}(\text{قطع})\text{س})' = \frac{-١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}} ،\text{قوس ظا}(\text{قطع})\text{س})' = \frac{-١}{١ - \text{س}^{٢}} ،(\text{قوس ظتا}(\text{قطع})\text{س})' = \frac{-١}{١ - \text{س}^{٢}}$$



قاعدة الاشتقاق الضمني:

إذا كان ψ = ق (ك (س)) حيث ك (س) تابعاً ضمنياً في ق عندئذٍ فإن:

$\psi_{س}$ (س) = قَ (س) = قَ (ك (س)). كَ (س).

مثال: إذا كان لدينا التابع ق (س) = $لو_{هـ}$ ($س^{٢}$ + س).

$$قَ(س) = \frac{١}{س^{٢}+س} \times (٢س+١) = \frac{٢س+١}{س^{٢}+س}$$

وحسب القاعدة الأخيرة يمكننا الآن إيراد الجدول التالي:

التابع	مشتق التابع
$س^{ن}$	$ن س^{ن-١} . سَ$
$\sqrt{س}$	$\frac{سَ}{٢\sqrt{س}}$
جا س	جتا س . سَ
جتا س	− جا س . سَ
ظا س	$\frac{-سَ}{جتا^{٢}س}$
ظتا س	$\frac{-سَ}{جا^{٢}س}$
$لو_{هـ}س$	$\frac{سَ}{س}$

نتائج هامة في الاشتقاق والاستمرار:

مبرهنة: إذا كان ق قابلا للاشتقاق فهو مستمر والعكس غير صحيح بالضرورة.





البرهان: إذا كان ق قابلا للاشتقاق عند س٠ فإنه يمكن كتابة:

ق (س٠ + هـ) − ق (س) = أ. هـ + μ (هـ) حيث أ عدداً حقيقياً محدوداً و μ (هـ) يحقق أن نها هـ ← ... μ (هـ) =٠، والآن بكتابه س = س٠ + هـ واختيار | μ (هـ) | $< \frac{\varepsilon}{2}$: هـ= $\frac{\varepsilon}{2أ}$ نجد أن

$$|ق(س) - ق(س_٠)| \le |أ|.|هـ| + |\mu(هـ)| \le |أ| . \frac{\varepsilon}{2|أ|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

⇐ فالتابع ق مستمر تعريفاً لأن نهاس ← س٠ ق (س) = ق (س٠) بالنسبة للقسم الثاني من المبرهنة نلاحظ التابع ق (س) = | س | إن هذا التابع يمكن كتابته بالشكل

$$ق(س) = \begin{cases} س & س \ge ٠ \\ -س & س \le ٠ \end{cases}$$

وهو مستمر عند س = ٠ ذلك لان:

$\lim_{هـ \to ٠} ق(س) = \lim_{هـ \to ٠} ق(س) = ق(٠) = ٠$ لكن ق غير قابل للاشتقاق ذلك لأن

يمين $ق'(٠) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(هـ) - ق(٠)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ} = ١$

بينما يسار $ق'(٠) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(هـ) - ق(٠)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-هـ}{هـ} = -١$

ونلاحظ أن يمين. قَ (٠) ≠ يسار. قَ (٠)

⇐ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

تمارين محلولة

أوجد المشتق الأول لكل من التوابع التالية:

١- ق(س) = وترظا (لو$_{هـ}$ س)

الحل: $ق^{\prime}(س) = \frac{١}{١ + (لو_{هـ} س)} \times \frac{١}{س}$

٢- لو$_{هـ}$ $\sqrt{قوس\ جتا\ س}$

الحل: $ق^{\prime}(س) = \frac{١}{\sqrt{قوس\ جتا\ س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{قوس\ جتا\ س}} \times \frac{-١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

٣- ق (س) = وتر جا (قطع) (جا (س^{٢} + ١))

الحل: $ق^{\prime}(س) = \frac{١}{\sqrt{(جا(س^{٢}+١))^{٢} - ١}} \times جتا(س^{٢}+١) \times ٢س$

٤- $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+٣ & س < ٢ \\ س + ٥ & ٢ < س < ٤ \\ ٣س^{٢}+٦س & ٤ < س \end{cases}$

٢، ٤ غ.م

الحل: $ق^{\prime}(س) = \begin{cases} ٢س & س < ٢ \\ ١ & ٢ < س < ٤ \\ ٢،٤ & ع ، م \end{cases}$

٥- $ق(س) = \begin{cases} جتا س & س \leq \pi \\ جا س & \pi < س \leq ٣\pi - ٥ \\ ظا س & ٣\pi - ٥ < س \end{cases}$

الحل: $ق^{\prime}(س) = \begin{cases} -جا س & س < \pi \\ جتا س & \pi < س < ٣\pi - ٥ \\ \frac{١}{جتا^{٢} س} & ٣\pi - ٥ < س \end{cases}$

٦- $\frac{س^{٢} + س + ١}{س^{٣} + ١}$

الحل: $ق^{\prime}(س) = \frac{(٢س + ١) \cdot (س^{٣} + ١) - (٣س^{٢})(س^{٢} + س + ١)}{(س^{٣} + ١)^{٢}}$

٧ - $ق(س) = هـ^{قوسجاس}$

الحل: $ق^{\prime}(س) = هـ^{وترجاس} \times \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

٨- $ق(س) = قوس\ جا\ (قطع)\ [هـ^{س^{٢}}]$

الحل: $ق^{\prime}(س) = \frac{١}{\sqrt{(هـ^{س^{٢}})^{٢} - ١}} \times هـ^{س^{٢}} \times ٢س$

٩- $ق(س) = هـ^{(قوس\ ظا\ س)^{٢}}$

الحل: $ق^{\prime}(س) = هـ^{(قوسظاس)^{٢}} \times ٢\ قوسظا\ س \times \frac{١}{١ + س^{٢}}$

١٠- $ق(س) = س^{٢}\ هـ^{س}$

الحل: $ق^{\prime}(س) = ٢س \cdot هـ^{س} + س^{٢} هـ^{س}$

١١- ق (س) = س. لو هـ س

الحل: $ق'(س) = لو_هـ س + س \cdot \frac{١}{س} = لو_هـ س + ١$

١٢- $ق(س) = \frac{لو_هـ س}{س}$

الحل: $ق'(س) = \frac{\frac{١}{س} \cdot س - لو_هـ س}{س^٢} = \frac{١ - لو_هـ س}{س^٢}$

١٣- $ق(س) = ا^س$

الحل: $ق(س) = ا^س \cdot لو_هـ ا$

طريقة الاشتقاق بواسطة اللوغاريتم

إذا كنا أمام تابع ق (س) معقد من حيث الشكل الجبري نستخدم في الغالب هذه الطريقة وهي كما يلي:

إذا كان لدينا ص = ق (س)

نقوم أولاً بأخذ لوغاريتم الطرفين $لو_هـ ص = لو_هـ ق(س)$

ثم نشتق $\frac{دص}{ص} = \frac{ق'(س)}{ق(س)} \cdot دس$

ثم نستخرج المقدار $ص' = \frac{دص}{دس} = ص \cdot \frac{ق'(س)}{ق(س)}$

ونكون بذلك قد حصلنا على مشتق هذا التابع.

مثال: $\text{ص} = \text{س}^{\text{س}}$ لاشتقاق هذا التابع نجري الخطوات $\text{لوص} = \text{لوس}^{\text{س}} = \text{س}.\ \text{لوس}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{ص}} = (١.\ \text{لوس})\text{دس} \Rightarrow \text{ص}' = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}.(\text{لوس}+١) = \text{س}^{\text{س}}.(\text{لوس}+١)$$

مثال: $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ١)^{٥}$

$$\text{لوص} = \text{لو}\ (\text{س}^{٢} + ١)^{٥} = ٥.\ \text{لو}\ (\text{س}^{٢} + ١) \Rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = ٥.\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢}+١}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١٠.\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١)}.(\text{س}^{٢}+١)^{٥} = ١٠\text{س}(\text{س}^{٢}+١)^{٤} \Rightarrow \text{ص}' = ١٠\text{س}(\text{س}^{٢}+١)^{٤}$$

مثال: $\text{ص} = (\text{جا س})^{\text{س}}$

$$\text{لوص} = \text{لو}(\text{جا س})^{\text{س}} = \text{س}.\ \text{لوجا س} \Rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{ص}}(١.\ \text{لوجا س} + \text{سظا س})\text{دس}$$

$$\Rightarrow \text{ص}' = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص}.(\text{لوجا س} + \text{س}.\text{ظا س}.\text{س}) = (\text{جا س})^{\text{س}}.(\text{لوجا س} + \text{سظا س})$$

مثال: $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$

$$\Rightarrow \text{لوص} = \text{س}^{٢} \Rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = ٢.\text{س}\,\text{دس}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢.\text{س}\,\text{ص} = ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$$

تعريف الاشتقاق من مراتب عليا:

نعرف المشتق الثاني للتابع ق بأنه مشتق المشتق ويرمز له قً (س) حيث وهكذا نعرّف المشتق من المرتبة (ن) تدريجياً بالشكل $\text{ق}^{\text{ن}}(\text{س}) = [\text{ق}^{(\text{ن}-١)}(\text{س})]$

ودستور لايبنتير لاشتقاق تابع من الشكل ق =ع. ل حتى المرتبة (ن):

أولاً: سنورد الرموز التالية

$ل^{(ن)}$ مشتق ل من الرتبة (ن)

$ل^{(م)}$ مشتق ل من المرتبة م

وسنضع اصطلاحاً $ل^{(٠)} = ع$ و $ع = ل^{(٠)}$

ولنلاحظ ما يلي:

$$ق^{(١)} = ع . ل^{(١)} + ع^{(١)} . ل$$

$$ق^{(٢)} = ع . ل^{(٢)} + ٢ع^{(١)} . ل^{(١)} + ع^{(٢)} . ل$$

$$ق^{(٣)} = ع^{(٠)} . ل^{(٣)} + ٣ ع^{(١)} . ل^{(٢)} + ٣ع^{(٢)} . ل^{(١)} + ع^{(٣)} . ل^{(٠)}$$

وهكذا حتى نصل إلى الدستور:

$$ق^{(ن)}_{(س)} = \sum_{م=٠}^{ن} جـ^{م}_{ن} \cdot ع^{(م)}_{(س)} \cdot ل^{(ن-م)}_{(س)} : جـ^{م}_{ن} = \frac{ن!}{م!(ن-م)!}$$

والآن سنثبت هذا الدستور بطريقة الاستقراء الرياضي:

١- نلاحظ أنه من أجل (ن = ٢) القضية محققة حسب ما ورد أولاً.

٢- لنفرض الآن صحة القضية من أجل (ن) حيث

$$ق^{(ن)}(س) = \sum_{م=٠}^{ن} جـ^{م}_{ن} \cdot ع^{(م)}_{(س)} \cdot ل^{(ن-م)}_{(س)} \quad ....(*)$$

٣- سنثبت الآن هذه القضية من أجل (ن + ١) الآن باشتقاق العلامة (*) نجد ان:

$$ق^{(ن+1)}(س) = (جـ_{ن}^{0} ع^{(0)}(س) ل^{(ن)}(س) + ... + جـ_{ن}^{ن} \cdot ع^{(ن)}(س) \cdot ل^{(0)}(س))'$$

$$= جـ_{ن}^{0} ع^{(1)}(س) ل^{(ن)}(س) + جـ_{ن}^{1} \cdot ع^{(0)}(س) \cdot ل^{(ن+1)}(س) + ... + جـ_{ن}^{ن} \cdot ع^{(ن)}(س) \cdot ل^{(1)}(س)$$

وهكذا بمتابعة الحدود حداً حد نجد أن:

$ق^{(ن+1)}(س) = \sum_{م=0}^{ن+1} جـ_{ن}^{م} \cdot ع_{(ن)}^{(م)} \cdot ل^{(ن-م)}(س)$ وهو دستور لايبتيز ويكون محققاً من أجل ن > ٢

مثال: اوجد المشتق النوني للتابع ق (س)= س^٢ جتا س

وبملاحظة ع = جتا س و ل = س^٢

$$\left\{\begin{array}{l} ع' = -جا س = (جتا(س + \frac{\pi}{٢})) \\ ع'' = -جتا س = جتا(س + \frac{\pi}{٢}) \\ ع''' = جا س = جتا(س + \frac{٣\pi}{٢}) \end{array}\right. \Leftarrow ع^{(ن)} = جتا(س + \frac{ن\pi}{٢})$$

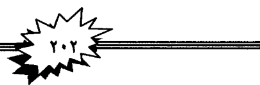
ولدينا أيضاً

$$ل^{(0)} = س^{٢} \rightarrow ل^{(1)} = ٢س \rightarrow ل^{(2)} = ٢ \Leftarrow ل^{(3)} = 0$$

والآن بكتابة دستور لايبنيتز

$$ق^{(ن)}(س) = جـ_{ن}^{0} \cdot ل^{(0)} \cdot ع^{(ن)} + جـ_{ن}^{1} \cdot ل^{(1)} \cdot ع^{(ن-1)} + جـ_{ن}^{2} ل^{(2)} ع^{(ن-2)} + جـ_{ن}^{3} ل^{(3)} \cdot ع^{(ن-3)} + ...$$

$$= 1 \cdot س^{٢} \cdot جتا(س + ن \cdot \frac{\pi}{٢}) + ن \cdot ٢س \cdot جتا(س + (ن-1)\frac{\pi}{٢}) + \frac{ن(ن-1)}{٢!} \cdot ٢ \; جتا(س + (ن-٢)\frac{\pi}{٢}) + ...$$



$$\Leftarrow \text{ق}^{(\text{ن})}(\text{س}) = \text{س}^{2}\ \text{جتا}(\text{س} + \frac{\text{ن}\pi}{2}) + 2\text{ن}\,\text{س}\ \text{جتا}(\text{س} + \frac{\text{ن}-1}{2}\cdot\pi) + 2\text{ن}(\text{ن}-1)\ \text{جتا}(\text{س} + \frac{\text{ن}-2}{2}\pi)$$

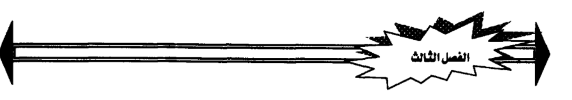
والآن إذا أردنا حساب المشتق العاشر لهذا التابع نجد أن

$$\text{ق}^{(10)}(\text{س}) = \text{س}^{2}\ \text{جتا}(\text{س} + 5\pi) + 2(10)\text{س}\ \text{جتا}(\text{س} + \frac{9}{2}\cdot\pi) + 2\cdot 10(9)\ \text{جتا}(\text{س} + \frac{8}{2}\pi)$$

$$= \text{س}^{2}(-\ \text{جتاس}) + 20\text{س}(-\text{جاس}) + 180\ \text{جتاس}$$

$$= -\text{س}^{2}\cdot\ \text{جتاس} - 20\text{س}\,\text{جاس} + 180\ \text{جتاس}$$

$$= \text{جتاس}\left[180 - \text{س}^{2}\right] - 20\text{س}\,\text{جاس}$$



تمارين غير محلولة

احسب بواسطة دستور لايبنتيز المشتق السابع لكلاً من التوابع التالية:

١- ق (س) = $س^٢$ $هـ^س$

٢- ق (س) = $س^٣$. جا ٢ س

٣- ق (س) = $هـ^س$ جتا س

٤- ق (س) = $س^٣$ $لوهـ^{٢س}$

٥- ق (س) = $س^٢$. وتر ظا س

تطبيقات ونتائج ومبرهنات الاشتقاق

تعريف: النقطة الموضعية الصغرى: نقول أن جـ هي نقطة موضعية صغرى للتابع جـ على المجال [م،ب] إذا كان ∀س ∍ [م،ب]: ق (جـ) ≥ ق (س).

تعريف: النقطة الموضعية العظمى: نقول أن جـ نقطة موضعية عظمى للتابع. ق على المجال [م،ب] إذا كان $∀_س$ ∋ [م،ب]: قَ (جـ) ≥ قَ (س)

تعريف: النقطة الموضعية القصوى: نقول أن جـ نقطة موضعية قصوى للتابع ق على المجال [م،ب] إذا كان نقطة موضعية عظمة أو صغرى.

مبرهنة: إذا كان ق قابلا للاشتقاق متزايدا على [م،ب] فإن ق (س) >٠

البرهان: إذا نظرنا إلى نهاية ق'(س) = $نها_{هـ←}$ $\frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$ نجد انه باعتبار التابع متزايد ق (س + هـ) > ق (س) ⇐ ق (س + هـ) – ق (س) > ٠

⇐ $\frac{ق(س+هـ)-ق(س)}{هـ}$ >٠.





$\Leftarrow$ قَ(س) = نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$ > ٠

مبرهنة: إذا كان ق قابلا للاشتقاق على المجال [أ،ب] فانه إذا كان ق متناقصا

$\Leftarrow$ قَ (س) < ٠: $\forall$ س $\in$ [أ،ب].

البرهان: يتم بطريقة مشابهة للمبرهنة السابقة.

مبرهنة فيرما: إذا كان ق تابعا قابلا للاشتقاق. كانت جـ نقطة موضوعية قصوى للتابع ق على المجال عندئذ فإن قَ (جـ) = ٠

البرهان: الآن بفرض جـ نقطة موضوعية عظمى - وسنناقش حالة جـ موضوعية صغرى بنفس الطريقة، عندئذ فإن $\Leftarrow$ قَ (س) > ق (س): $\forall$ س $\in$ [أ،ب]. وبملاحظة المقدار.

يمين نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{ق(جـ + هـ) - ق(جـ)}{هـ}$

ولأن جـ قيمة موضوعية عظمى نجد أن ق (جـ + هـ) − ق (جـ) < ٠

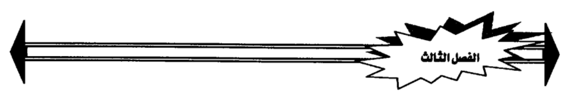
يمين قَ(جـ) = قَ(جـ) = نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{ق(جـ + هـ) - ق(جـ)}{هـ}$ $\leq$ ٠.

وذلك لأن: ق (جـ + هـ) −ق (س) < ٠، هـ > ٠ الآن بالنسبة للمشتق اليسار سنلاحظ أن يسار

قَ(جـ) = قَ(جـ) = نها$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{ق(جـ + هـ) - ق(جـ)}{هـ}$ $\leq$ ٠ وذلك لان هـ > ٠، ق (جـ + هـ) − ق (س) < ٠

لكن التابع ق قابلا للاشتقاق $\Leftarrow$ قَ (جـ) = يمين قَ (جـ) = يسار قَ (جـ) $\Leftarrow$ قَ (جـ) = ٠ وتم المطلوب





ملاحظة هامة: أن شروط مبرهنة فيرما تعتبر شروط لازمة وغير كافية حيث يمكن ان نجد قَ (جـ) = ٠ دون أن تكون جـ نقطة موضوعية قصوى.

مثال: ق (س) =س٣ نلاحظ أن قَ (س) = ٣س^{٢} ⇐ ق (٠) =٠

بينما س=٠ ليست قيمة موضوعية قصوى للتابع ق (س) = س^{٣}.

مبرهنة رول: إذا كان لدينا تابعا ق محققا للشروط التالية:

ق معرفا على المجال [م،ب].

ق مستمرا وقابلا للاشتقاق على [م،ب].

ق (أ) = ق (ب).

عندئذ فانه توجد جـ ∈ [م،ب] بحيث قَ (جـ) = ٠

البرهان: الآن بفرض التابع ق تابعا لا ثابتا عندئذ فإن قَ (س) =٠ وانتهى البرهان.

إذا لم يكن ق ثابتا فانه مطرد وباعتباره مستمراً فانه يحقق جميع قيمه على المجال [م،ب] وعندها فانه يوجد نقطة قيمة قصوى (أما صغرى أو عظمى). وذلك استنادا إلى الشرط الثالث ق (أ) = ق (ب) ولتكن جـ ∈ [م،ب]وبالتالي وحسب مبرهنة فيرما فإن قَ (جـ) = ٠

مبرهنة لاجرانج: إذا كان ق تابعا محققا للشروط التالية:

ق معرف على المجال [م،ب].

ق مستمرا وقابلا للاشتقاق على المجال [م،ب] عندئذ فانه توجد نقطة جـ ∈ [م،ب] بحيث ان



$$ق'(جـ) = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}$$

البرهان: أولا لنشكل التابع

$$ص(س) = ق(س) - ق(أ) - \left(\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}\right)(س - أ)$$

نلاحظ أن ص (س) تابعا مستمرا للاشتقاق على [أ،ب] ويحقق الخاصية $ص(أ) = ص(ب) = ٠$

وهذا يعطينا حسب نظرية رول انه توجد نقطة جـ ∈ [أ،ب] بحيث صَ (جـ) = ٠

وبملاحظة أن $ص'(س) = ق'(س) - \left(\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}\right)$

$$\Leftarrow ص'(جـ) = ٠ \Leftarrow ق'(جـ) - \left(\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}\right) = ٠$$

$ق'(جـ) - \left(\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ب - أ}\right)$ وهو المطلوب.

ملاحظة هامة: إن الشروط الواردة في مبرهنتي روي ولا غرانج هي شروط كافية لازمة - الجدير بالذكر أن مبرهنة لاغرانج تسمى أيضاً مبرهنة التزايدات المحدودة.

مبرهنة كوشي: إذا كان ق. ك تابعين بحيث

١- ق، ك مستمران على [أ،ب]



٢- ق، ك قابلان للاشتقاق على المجال [أ،ب] عندئذ توجد جـ ∈ [أ،ب]

بحيث أن $\frac{ق'(جـ)}{ك'(جـ)} = \frac{ق(ب) - ق(أ)}{ك(ب) - ك(أ)}$

حيث ك(ب) ≠ ك(أ)، كَ (س) ≠ ٠

البرهان: لنشكل المتابع أولاً:

$$\Psi(س) = ق(س) - ق(أ) - \left(\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ق(ب) - ق(أ)}\right)(ك(س) - ك(أ))$$

ونلاحظ أن Ψ هو تابع مستمر وقابل للاشتقاق وفيه $\psi(أ) = \psi(ب) = ٠$

عندئذ فإنه وحسب مبرهنة رول توجد جـ ∈ [أ،ب] بحيث $\psi'(جـ) = ٠$

وبملاحظة أن $\psi'(س) = ق'(س) = \left(\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ك(ب) - ك(أ)}\right)ك'(س)$

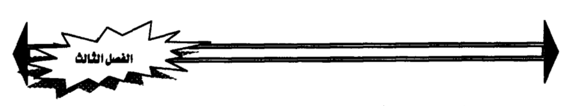
$$\Leftarrow \psi'(جـ) = ق'(جـ) = \left(\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ك(ب) - ك(أ)}\right) . ك'(جـ) = ٠ \Leftarrow \frac{ق'(جـ)}{ك'(جـ)} = \left(\frac{ق(ب) - ق(أ)}{ك(ب) - ك(أ)}\right)$$

وهو المطلوب.

مبرهنة أوبتال: إذا كان لدينا ق، ك تابعين مستمران وقابلان للاشتقاق على [أ،ب] عندئذٍ فإن:

$$\lim_{س \to س_٠} \frac{ق}{ك}(س) = \lim_{س \to س_٠} \frac{قَ}{كَ}(س) \quad \text{حيث ك} \neq ٠، ك' \neq ٠$$

البرهان: إذا أجرينا المناقشة على مجال $[س_ن، س_ن + ١]$ بحيث س٠ ∈ $[س_ن، س_ن + ١]$ وطبقنا نظرية كوشي نجد أنه توجد $[س_ن، س_ن + ١]$ بحيث



$\frac{ق(س_ل)}{ك(س_ل)} = \frac{ق(س_{ن+1}) - ق(س_ن)}{ك(س_{ن+1}) - ك(س_ن)}$ وبفرض أن هـ = س ن + ١ − س ن نجد انه يمكننا الكتابة

$$\frac{ق(س_ل)}{ك(س_ل)} = \frac{ق(س_{ن+هـ}) - ق(س_ن)}{ك(س_{ن+هـ}) - ك(س_ن)} = \frac{[ق(س_{ن+هـ}) - ق(س_ن)]/هـ}{[ك(س_{ن+هـ}) - ك(س_{ن س})]/هـ}$$

والآن بأخذ نهايتي الطرفين عندما هـ ← ٠ نجد أن:

$$\lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س_ل)}{ك(س_ل)} = \frac{\lim_{هـ \to 0}[ق(س_{ن+هـ}) - ق(س_ن)]/هـ}{\lim_{هـ \to 0}[ك(س_{ن+هـ}) - ك(س_{ن س})]/هـ}$$

وبملاحظة أن $[س_ل \to س_ن \Leftarrow هـ \to 0]$ نجد أن $\lim_{س \to س_0} \frac{ق(س)}{ك(س)} = \lim_{س \to س_0} \frac{ق'(س)}{ك'(س)}$

امثلة تطبيقية:

احسب النهاية $\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س}$

الحل: بملاحظة أن $\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} = \frac{0}{0}$ وهذه حالة عدم تعيين لإزالتها نستخدم قاعدة أوبتال لنجد أن $\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س}$

$$\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{جتا س}{1} = 1$$

٢- احسب النهاية $ق(س) = \frac{س + 1}{3س + 5}$ بملاحظة أن $\lim_{س \to \infty} \frac{س + 1}{3س + 5} = \frac{\infty}{\infty}$ ولإزالة حالة عدم التعيين هذه نستخدم قاعدة أوبتال لنجد أن

$$\lim_{س \to \infty} \frac{س + 1}{3س + 5} = \lim_{س \to \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$





٣- احسب النهاية $\underset{س\to ٠}{نها}\frac{جا س - ظا س}{س^{٢}}$ نلاحظ $\underset{س\to ٠}{نها}\frac{جا س - ظا س}{س^{٢}}$ وهي حالة عدم تعيين أيضا لإزالتها نستخدم قاعدة أوبتال لنجد أن:

$$\underset{س\to ٠}{نها}\frac{جا س - ظا س}{س^{٢}} = \underset{س\to ٠}{نها}\frac{جتا س - ١/ جتا^{٢} س}{٢س} = \frac{٠}{٠}$$

وهي حالة عدم تعيين أيضاً لإزالتها نستخدم قاعدة أوبتال لنجد أن

$$\underset{س\to ٠}{نها}\frac{جا س - ظا س}{س^{٢}} = \underset{س\to ٠}{نها}\frac{جتا س - ١/ جتا^{٢} س}{٢س} = \underset{س\to ٠}{نها}\frac{-جا س - ٢جا س/ جتا^{٣} س}{١} = \frac{٠ - ٠/١}{٠} = ٠$$

ملاحظة مهمة:

إن مبرهنة أوبتال صحيحة من أجل $س \to \infty$ أو $س \to -\infty$ أو $س \to س_{٠}$

نستخدم قاعدة اوبتال للتخلص من حالات عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\frac{٠}{٠}$ أو $\infty \cdot (٠)$

مناقشة عامة في حالات عدم التعيين: أن حالات عدم التعيين تأتي على ثلاثة أشكال هامة

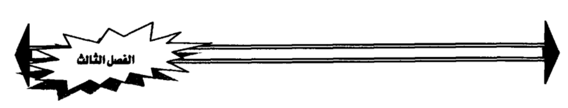
الشكل الأول: حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{٠}{٠}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty \cdot (٠)$

وفي حالة للتخلص منها نستخدم قاعدة أوبتال

مثال ١: $\underset{س\to ٣}{نها}\frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$ نلاحظ أن $\underset{س\to ٣}{نها}\frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣} = \frac{٠}{٠}$

والآن بتطبيق أوبتال أن $\underset{س\to ٣}{نها}\frac{٤س^{٣}}{١} = ٤ \times ٢٧ = ١٠٨$





مثال ٢: $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٣}+١}$ **بملاحظة أن** $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٣}+١}$ **الآن بتطبيق قاعدة أوبتال نجد أن** $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}+٥}{\text{س}^{٣}+١} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{١}{٣\text{س}^{٢}} = ٠$

مثال ٣: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}}$ **نلاحظ أن** $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}} = \infty\cdot(٠)$

الآن لنطبق أوبتال $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \text{س}\,\text{هـ}^{-\text{س}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}}} = ٠$

٢- الشكل الثاني: $\infty - \infty$ يمكن إرجاع هذا الشكل إلى الشكل الأول أو التخلص منه نهائيا بواسطة عمليات جبرية بسيطة أشهرها (الضرب بالمرافق).

مثال: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س}+١}$ نلاحظ أن $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}+١} - \sqrt{\text{س}} = \infty - \infty$

الآن لنضرب ونقسم بالمقدار $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س}+١}$ **ويسمى المرافق** $(\sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س}+١})$ **فنجد أن**

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{س}+١} \times \frac{\sqrt{\text{س}+١} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}+١} + \sqrt{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{١}{\sqrt{\text{س}+١} + \sqrt{\text{س}}}$$

٣. الشكل الثالث: $(١)^{\infty}$ أو $(٠)^{٠}$ أو $(\infty)^{٠}$

ويمكن التخلص منها بواسطة أخذ لوغريتم المقدار وحساب نهاية هذا اللوغاريتم ومن ثم العودة إلى الشكل الأول.

مثال: $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}} (\text{جتا س})^{\frac{١}{\text{س}}}$ **نجد أن** $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} (\text{جتا س})^{\frac{١}{\text{س}}} = ١^{\infty}$

الآن نأخذ لوغاريتم الطرفين في العلاقة:



$ص = (جتا س)^{\frac{1}{س}} \Leftarrow لو_{هـ} ص = \frac{1}{س} . لو_{هـ} جتا س$

الآن لحسب نهاية هذا اللوغاريتم. حيث $\left(لو_{هـ} ١ = ٠ \right)$

$$\lim_{س \to ٠} لو_{هـ} ص = \lim_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ}(جتا س)}{س} = \frac{٠}{٠}$$

حالة عدم تعيين من الشكل الأول نعالجها وفق أوبتال لنجد أن:

$$\lim_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ}(جتا س)}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{-جا س}{جتا س}}{١} = ٠$$

والآن لجد أن $\lim_{س \to ٠} لو_{هـ} ص = ٠$

والآن لجد أن $\lim_{س \to ٠} = هـ^{٠} = ١ \Leftarrow \lim_{س \to ٠} (جتا س)^{\frac{1}{س}} = ١$



تمارين عامة

أ. بين في كلاً مما يلي إذا كان التابع المعطي مستمراً أم لا عند النقطة المعطاة

١- $ق(س) = \begin{cases} س & س < ٠ \\ س + ٢ & س \geq ٠ \end{cases}$: س = ٠

٢- $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ٠ \geq س \\ س + ٢ & ٠ < س < ١ \\ س + ٥ & س \geq ١ \end{cases}$: س = ٠ ، س = ١

٣- $ق(س) = \begin{cases} س + ٢ & س > ١ \\ س - ٢ & س \leq ١ \end{cases}$: س = ١

٤- $ق(س) = \begin{cases} س + ٥ & س > ١ \\ ٧ & س = ١ \\ ٢س + ٤ & س < ١ \end{cases}$: س = ١

وبين فيما سبق نوع النقطة إذا كانت نقطة انقطاع.

ب. أوجد مشتق كلاً من التوابع التالية:

١- $ق(س) = س^٥ + جا س$

٢- $ق(س) = هـ^{س} . جا س$

٣- $ق(س) = \frac{جا س}{س}$

٤- $ق(س) = س . لو_{هـ} س$

٥- $ق(س) = هـ^{س} . س^{٢}$

٦- $ق(س) = هـ^{س} . س^{٥} . جا س$

٧- $ق(س) = ظا^{٢} س$

٨- $ق(س) = ظتا \frac{١}{س}$

٩- $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & س \leq ٠ \\ ٤س + ٢ & ٠ < س < ١ \\ س + ٥ & س \geq ١ \end{cases}$ ، $ق(س) = لو_{هـ} \sqrt{س^{٢} - ١}$

١٠- $ق(س) = جا(لو_{هـ} س)$

١١- $ق(س) = ظتا (\sqrt{س})$

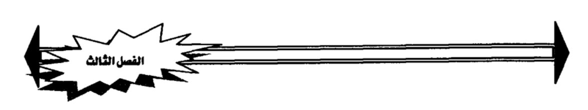
١٢- $ق(س) = \sqrt{لو_{هـ} (١/س)}$

١٣- $ق(س) = \sqrt{\sqrt{س} + جتا س}$

١٤- $ق(س) = (جتا س)^{٢/٣}$

١٥- $ق(س) = \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}$

١٦- $ق(س) = \frac{س^{٢} . جا س}{هـ^{س}}$



ج- ادرس وجود مشتق لكلاً من التوابع التالية عند النقاط المعطاة.

١- $ق(س) = |س|$ عند $س = ٠$

٢- $ق(س) = لو_هـ س$ عند $س = ٠$

٣- $ق(س) = هـ^{س}$ عند $س = ١$

٤- $ق(س) = هـ^{|س^٢ + ٣س + ٢|}$ عند $س = ١$ & وعند $س = -٢$

٥- $ق(س) = جا س$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

٦- $ق(س) = ظتا س$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

٧- $ق(س) = هـ^{ظتا س}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

د- احسب المشتق اليمين أو المشتق اليسار أو كليهما معاً حسب ما تجده مناسباً لكلا من التوابع التالية عند النقاط المعطاة.

١- $ق(س) = \sqrt{س^٢ - ١}$ عند $س = ١$ و $س = -١$

٢- $ق(س) = هـ^{س}$ عند $س = ٠$

٣- $ق(س) = لو_هـ س$ عند $س = ٠$

٤- $ق(س) = هـ^{لو_هـ س}$ عند $س = ١$

٥- $ق(س) = قوس ظتا س$ عند $س \to \infty$

هـ - باستخدام قاعدة الاشتقاق بواسطة اللوغاريتم أوجد كلاً من المشتقات التالية:

١- $ق(س) = س^{س}$

٢- $ق(س) = س^{قوس ظا س}$



المشتقات



الفصل الرابع

المشتقات

جدول المشتقات: نثبت فيما يلي جدولاً يلخص معظم نظريات الاشتقاق فهو يحوي مشتقات التوابع البسيطة توابع التابع، والتوابع العكسية:

التابع	المشتق
$س^{ن}$	$ن\,س^{ن-1}$
$\frac{1}{س^{ن}} = س^{-ن}$	$\frac{-ن}{س^{ن+1}} = -ن\,س^{-ن-1}$
$ع^{ن}$	$ن\,ع^{ن-1} \cdot ع'$
$\frac{1}{ع^{ن}} = ع^{-ن}$	$\frac{-ن\,ع'}{ع^{ن+1}} = -ن\,ع^{-ن-1}\,ع'$
$\sqrt[م]{س} = س^{\frac{1}{م}}$	$\frac{1}{م\sqrt[م]{س^{م-1}}} = \frac{1}{م}\,س^{\frac{1}{م}-1}$
$\sqrt[م]{ع} = ع^{\frac{1}{م}}$	$\frac{ع'}{م\sqrt[م]{ع^{م-1}}} = \frac{1}{م}\,ع^{\frac{1}{م}-1}\,ع'$
$ع\,ل\,و$	$ع'\,ل\,و + ع\,ل'\,و = ع\,ل'\,و$
$\frac{ع}{ل}$	$\frac{ع'ل - ل'\,ع}{ع^{2}}$
جا س	جتا س
جتا س	− جا س



التابع	المشتق
ظاس	$\frac{١}{جتا^{٢} س} = ١ + ظا^{٢} س$
جاع	جتاع . عَ
جتاع	-جاع . عَ
ظاع	$\frac{عَ}{جتا^{٢} ع} = (١ + ظا^{٢} ع)$ عَ
لوس	$\frac{١}{س}$
لوع	$\frac{عَ}{ع}$
$هـ^{س}$	$هـ^{س}$
$هـ^{ع}$	$هـ^{ع}$
$م^{س}$	$م^{س}$ لوس
$م^{ع}$	$م^{ع}$. لوم . عَ
قوس جاع	$\frac{عَ}{\sqrt{١ - ع^{٢}}}$ ، $\frac{\pi}{٢} > ع > \frac{-\pi}{٢}$ $\frac{- عَ}{\sqrt{١ - ع^{٢}}}$ ، $\frac{٣\pi}{٢} > ع > \frac{\pi}{٢}$
قوس جتاع	$\frac{عَ}{\sqrt{١ - ع^{٢}}}$ ، $٠ > ع > \pi$
ص = قوس جتاع	$\frac{- عَ}{\sqrt{١ - ع^{٢}}}$ ، $٢\pi > ع > \pi$

التابع	المشتق
$ص = \text{قوس ظا } ع$	$\frac{ع'}{١+ع^{٢}}$
$\text{جتا (قطع) } ع$	$\text{جا (قطع) } ع \cdot ع'$
$\text{جا (قطع) } ع$	$\text{جتا (قطع) } ع \cdot ع'$
$\text{ظا (قطع) } ع$	$\frac{ع'}{(\text{جتا (قطع) } ع)^{٢}}$
$\text{جتا (قطع) } س$	$\text{جا (قطع) } س$
$\text{جا (قطع) } س$	$\text{جتا (قطع) } س$
$\text{ظا (قطع) } س$	$\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ (قطع) } س} = ١ - \text{ظا}^{٢}\text{ (قطع) } س$
$\text{قوس جا (قطع) } س = \text{لو } (س + \sqrt{س^{٢} + ١})$	$\frac{١}{\sqrt{س^{٢} + ١}}$
$\text{قوس جتا (قطع) } س = \text{لو } (س \pm \sqrt{س^{٢} - ١})$	$\frac{\pm ١}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$ ، $س > ١$
$\text{قوس ظا (قطع) } س = \frac{١}{٢} \text{ لو } \frac{١ + س}{١ - س}$	$\frac{١}{١ - س^{٢}}$ ، $-١ < س < ١$
$\text{قوس ظتا (قطع) } س = \frac{١}{٢} \text{ لو } \frac{س + ١}{س - ١}$	$\frac{١}{١ - س^{٢}}$ ، $س < -١$ أو $س > ١$

نعني بالرمز " لو " اللوغاريتم النيبري أما إذا أردنا لوغاريتما آخر نضيف إلى الرمز لو أساس هذا اللوغاريتم كما لو كتبنا لـو فإننـا نعـني بـذلك اللوغـاريتم العشري. ونعني ب ع ل و وتوابع للمتحول المستقبل س.

مشتق تابع للتابع: إذا كان ص = ق (ع) حيث ع تابع للمتحول الوسيط فـإن مشتق التابع بالنسبة لـ س يساوي مشتقة بالنسبة لــع مـضروباً بمـشتق ع بالنسبة لـ س.



مشتق التابع المعاكس: إذا كان ص = ق (س) تابعاً له مشتق وإذا حللنا هـذه المعادلة بالنسبة لـ س و استعرضنا س بدلالة ص وكان يقابل كل قيمة لـــ ص قيمة واحدة لـ س وفرضا س = جا (ص) نـسمي هـذا التـابع بتـابع معاكس للتابع المفروض ويكون: قَ (س) & قَ (ص) = ١

يؤخذ مشتق ق (س) بالنسبة لـ س المتحول المستقل في هذا التابع أمـا &َ (ص) فهو مشتق التابع & (ص) باعتبار ص هو المتحول المستقل.

الاشـتقاق اللوغـارتمي: إذا كـان ص تابعـاً لـــ س فإننـا نـسمي بـالتعريف: $\frac{ص'}{ص}$ بالمشتق اللوغارتمي لـ ص ويبرهن بسهولة بأنه مشتق التابع | ص |

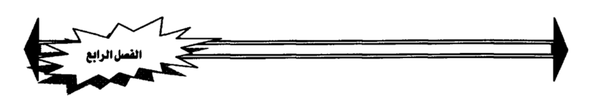
وهو القيمة المطلقة لـ ص كما يمكن برهان الجدول التالي:

التابع	المشتق اللوغارتمي
ق (س)	$\frac{ق'(س)}{ق(س)}$
ع. ل. و	$\frac{ع'}{ع}.\frac{ل'}{ل}.\frac{و'}{و}$
$ع^{ن}$	$\frac{ن ع'}{ع}$
$\frac{ع}{ل}$	$\frac{ع'}{ع}-\frac{ل'}{ل}$
$\sqrt[ن]{ع}$	$\frac{١}{ن}\frac{\sqrt{ع'}}{ع}$

المشتقات المتتالية لجداء تابعين: دستور لايبنز إذا كان ص = ع. ل فإن

$$ص^{(ن)} = ع\, ل^{(ن)} + جـ^{ن}\, ع'\, ل^{(ن-١)} + \dots\ ج^{ن}_{ي}\, ع_{ي}\, ل^{(ن-ي)} + \dots + ع^{(ع)}\, ل$$





تمارين محلولة

١- احسب مشتق التابع $ص=(٣س-٢)\sqrt{(١+س)^{٣}}$

الطريقة الأولى: *لنفرض* $ع=٣س-٢$ ، $ل=\sqrt{(١+س)^{٣}}=(١+س)^{\frac{٣}{٢}}$ *ولنطبق دستور مشتق جداء تابعين فنجد:*

$$ص'=ع'.ل+ع.ل'=٣(١+س)^{\frac{٣}{٢}}+(٣س-٢).\frac{٣}{٢}(١+س)^{\frac{١}{٢}}$$

$$ص'=\frac{٣}{٢}(١+س)^{\frac{١}{٢}}\left[٢(١+س)+(٣س-٢)\right]=\frac{٣}{٢}(١+س)^{\frac{١}{٢}}.٥س$$

$$ص'=\frac{١٥}{٢}س.\sqrt{١+س}$$

الطريقة الثانية: *لنأخذ لوغاريتم طرفي القيمة المطلقة للعلاقة (١) فيكون:*

$لو|ص|=لو|٣س-٢|+\frac{٣}{٢}لو|١+س|$ لنشتق طرفي هذه العلاقة فنجد:

$$\frac{ص'}{ص}=\frac{٣}{٣س-٢}+\frac{٣}{٢}.\frac{١}{١+س}=\frac{١٥س}{٢(٣س-٢)(١+س)}$$

$$\frac{ص'}{ص}=\frac{(٣س-٢)(١+س)^{\frac{٣}{٢}}.١٥س}{٢(٣س-٢)(١+س)}=\frac{١٥}{٢}س.\sqrt{١+س}$$

٢- برهن أن مشتق التابع الزوجي تابع فردي ومشتق التابع الفردي تابع زوجي

الحل: إذا كان التابع ق (س) زوجياً فإن يحقق العلاقة: ق (س) = ق (− س)





إذا أخذنا مشتق طرفي هذه العلامة بالنسبة لـ س فإننا نجد العلاقة ك قَ (س) = - قَ (- س)

وهي العلاقة التي تبين أن التابع قَ (س) فردياً.

أما إذا كان ق (س) فردياً فإنه يحقق العلاقة: ق (س) = - ق (- س)

وباشتقاق طرفي هذه المعادلة بالنسبة لـ س نجد: قَ (س) = قَ (- س)

وهذا يثبت أن قَ (س) تابع زوجي وهو المطلوب برهانه

٣- احسب مشتق التابع: ص= جا $\sqrt{س}$

نفرض ع= $\sqrt{س}$ فيكون: ص = جا ع

$$ص' = جتا ع . ع' = جتا \sqrt{س} \times \frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{جتا \sqrt{س}}{٢\sqrt{س}}$$

٤- احسب مشتق التابع: $ص = \frac{١}{١٢} لو \frac{٢س - ٣}{٢س + ٣}$

يمكن كتابة هذه العلامة بالشكل:

$$ص = \frac{١}{١٢}\left[لو(٢س - ٣) - لو(٢س + ٣)\right]$$

ومنه:

$$ص' = \frac{١}{١٢}\left(\frac{٢}{٢س - ٣} - \frac{٢}{٢س + ٣}\right) = \frac{١}{٤س^{٢} - ٩}$$

طريقة ثانية: يمكن كتابة العلاقة المفروضة بالشكل:

$$هـ^{١٢ص} = \frac{٢س - ٣}{٢س + ٣} \quad ....(١)$$



نأخذ مشتق الطرفين بالنسبة لـ س فنجد $\frac{٢(٢س+٣)-٢(٢س-٣)}{(٢س+٣)^{٢}}=\frac{١٢}{(٢س+٣)^{٢}}$

$$١٢.\frac{٢س-٣}{٢س+٣}.ص'=\frac{١٢}{(٢س+٣)^{٢}} \quad \text{ومنه} \quad ص'=\frac{١}{٤س^{٢}-٩}$$

طريقة ثالثة: يمكن اعتباراً من العلاقة (١) ، أن تستخرج س بدلالة ص فنجد:

$$س=\frac{٣}{٢}.\frac{١+هـ^{١٢ص}}{١-هـ^{١٢ص}}=\frac{هـ^{٦ص}+هـ^{-٦ص}}{هـ^{٦ص}-هـ^{-٦ص}}=\frac{٣}{٢}-\frac{جتا(قطع)٦ص}{جا(قطع)٦ص}$$

$$\text{ومنه:}\ س'ص=\frac{٣}{٢}\cdot\frac{٦\left((جا(قطع))^{٢}٦ص-(جتا(قطع)^{٢}٦ص)\right)}{(جتا(قطع))^{٢}٦ص}=\frac{٩}{(جا(قطع))^{٢}٦ص}$$

ولكن من المعلوم:

$$(جا(قطع))^{٢}٦ص=\frac{جتا(قطع)١٢ص-١}{٢}=\frac{١}{٢}\cdot\frac{هـ^{١٢ص}+هـ^{-١٢ص}}{٢}-\frac{١}{٢}$$

واستناداً إلى العلاقة (١):

$$\text{نجد:}\ (جا(قطع))^{٢}٦ص=\frac{١}{٤}\left[\frac{٢س-٣}{٢س+٣}+\frac{٢س+٣}{٢س-٣}\right]-\frac{١}{٢}=\frac{٩}{٤س^{٢}-٩}$$

ومنه $س'ص=٤س^{٢}-٩$ ،

واستناداً إلى قاعدة اشتقاق تابع التابع نجد: $ص'=\frac{١}{س'ص}=\frac{١}{٤س^{٢}-٩}$

٥- احسب مشتق التابع: $ص=قوس\ جا\ \frac{هـ^{٢س}-هـ^{-٢س}}{هـ^{٢س}+هـ^{٢س}}$

الطريقة الأولى: نفرض: $ع=\frac{هـ^{٢س}-هـ^{-٢س}}{هـ^{٢س}+هـ^{-٢س}}=ظا(قطع)٢س$

$$ع'=٢(١-ظا(قطع)٢س)\overset{\text{ومنه}}{\Leftarrow}ص=قوس\ جا\ ع$$



إذا فرضنا بأن $\frac{-\pi}{2} <$ ص $< \frac{\pi}{2}$ يكون:

$$ص' = \frac{ع'}{\sqrt{1-ع^2}} = \frac{2\left(1-(\text{ظا قطع})^2 2س\right)}{\sqrt{1-(\text{ظا قطع})^2 2س}} = 2\sqrt{1-2س}$$

$$= \frac{2}{(\text{ظا(قطع)})^2 2س} = \frac{4}{هـ^{2س} + هـ^{-2س}}$$

الطريقة الثانية: إن العلاقة بالنسبة لـ س فتجد:

$$\text{جتا ص} \cdot ص' = \frac{2}{(\text{جتا(قطع)})^2 2س}$$

$$ص' = \frac{2}{(\text{ظا(قطع)})^2 2س \ \text{جتا ص}}$$ بما أننا فرضنا $\frac{-\pi}{2} <$ ص $< \frac{\pi}{2}$ أي جتا ص > 0

فإنه يكون:

$$\text{جتا}^2 ص = 1 - \text{جا}^2 ص = 1 - (\text{ظا(قطع)})^2 2س = \frac{1}{(\text{جتا(قطع)})^2 2س}$$

$$\frac{1}{\text{جتا(قطع)}2س} \quad \text{ومنه:} \quad ص' = \frac{2}{\text{جتا(قطع)}2س} = \frac{4}{هـ^{2س} + هـ^{-2س}}$$

طريقة ثالثة: اعتباراً من العلاقة (٢) يمكننا أن نجد: $هـ^{4س} = \frac{1+\text{جاص}}{1-\text{جاص}}$

$$س = \frac{1}{4} \text{لو} \frac{1+\text{جا ص}}{1-\text{جا ص}} = \frac{1}{4}\left[\text{لو}(1+\text{جا ص}) - \text{لو}(1-\text{جا ص})\right]$$

$$\text{ومنه:} \quad س'_ص = \frac{1}{4}\left(\frac{\text{جتاص}}{1+\text{جاص}} + \frac{\text{جتاص}}{1-\text{جاص}}\right) = \frac{2 \ \text{جتاص}}{4(1-\text{جا}^2 ص)} = \frac{1}{2 \ \text{جتاص}}$$

واستناداً إلى العلاقة (٣) نجد: $\frac{\text{جتا(قطع)}2س}{2}$. و أخيراً استناداً إلى قاعدة اشتقاق التابع المعاكس نجد:



$$\text{ص}' = \frac{1}{\text{س}'_{\text{ص}}} = \frac{2}{\text{جتا (قطع) }2\text{س}}$$

٦- احسب مشتق التابع: $\text{ص} = \text{قوس ظا (قطع) } \frac{3\text{س} + \text{س}^2}{1 + 3\text{س}^2}$

الحل: يمكن كتابة هذه العلاقة بالشكل $\text{قوس ظا (قطع) ص} = \frac{3\text{س} + \text{س}^3}{1 + 3\text{س}^2}$

نشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ ص فنجد:

$$\left(1 - \left(\text{ظا (قطع)}\right)^2 \text{ص}\right)\text{ص}' = \frac{3\left(1 + \text{س}^2\right)\left(1 + 3\text{س}^2\right) - 6\text{س}^2\left(3 + \text{س}^2\right)}{\left(1 + 3\text{س}^2\right)^2}$$

$$\left[1 - \frac{\left(3\text{س} + \text{س}^3\right)^2}{\left(1 + 3\text{س}^2\right)^2}\right]\text{ص}' = 3\left(\text{س}^2 - 1\right)^2 \Leftarrow \text{ص}' = \frac{3}{1 - \text{س}^2}$$

٧- احسب ميل مماس الخط البياني للتابع $\text{س}^4 + 16\ \text{ص}^4 = 23$ في النقطة (١،٢)

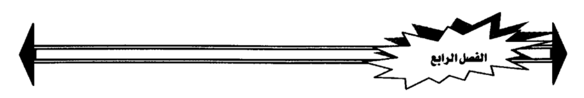
من المعلوم أن ميل المماس لخط بياني في نقطة من نقاطه يساوي قيمة مشتق التابع الممثل لهذا الخط البياني عندما نبدل فيه المتحول والتابع باحداثيي النقطة المفروضة. نلاحظ بسهولة أن النقطة (١، ٢) تحقق المعادلة المفروضة فهي إذن نقطة من نقاط الخط البياني للتابع المفرق بهذه المعادلة

لإيجاد المشتق صَ نشقه العلاقة المفروضة حيث نعتبر س المتحول المستقل وص التابع فيكون:

$$4\text{س}^3 + 16,\ (4)\ \text{ص}^3\ \text{ص}' = 0$$

$$\text{منه ص}' = \frac{-\text{س}^3}{16\text{ص}^3}$$





إن قيمة هذا المشتق من أجل س =٢، ص = ١ هي $\frac{-١}{٢}$ وهذه قيمة ميل مماس المنحنى في النقطة المفروضة .

٨- برهن صحة العلاقة قوس جتا (قطع) س = قوس ظا (قطع) $\frac{١}{س}$ واستنتج من ذلك مشتق التابع ص= قوس ظتا (قطع) س من المعروف ان: قوس ظا قطع س = $\frac{١}{٢}$ لو $\frac{١+س}{١-س}$ $\frac{١+س}{١-س}$ إذا بدلنا هذه العلاقة س بـ $\frac{١}{س}$ فإننا نجد:

$$\text{قوس ظا (قطع)}\frac{١}{س}=\frac{١}{٢}\text{ لو}\frac{١+١/س}{١+١/س}=\frac{١}{٢}\text{ لو}\frac{س+١}{س-١}$$

من المعروف أن الطرف الأيسر من هذه العلاقة يساوي قوس جتا قطع س. أما حساب مشتق جتا (قطع)

س فإننا نكتب العلاقة المطلوبة بالشكل: ص= قوس جتا (قطع) س = قوس ظا (قطع) ع.

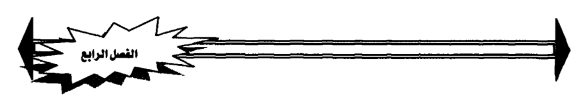
حيث فرضنا ع=$\frac{١}{س}$ ومن ثم نشتق طرفي هذه العلاقة بالنسبة لـ س

فنجد: $\acute{ص}=\frac{\acute{ع}}{١-ع^{٢}}=\frac{-١/س^{٢}}{١-١/س^{٢}}=\frac{-١}{١-س^{٢}}$

٩- احسب المشتقات من الرتبة ن للتوابع:

$\frac{١}{\sqrt{س}}$، جا٢س، جتا٢س، لو(١+س)،هـ^س جا س إن المشتقات المتتالية للتابع الأول وهو ص=س$^{\frac{-١}{٢}}$ ، وهي:





$$(1)\quad \text{ص}' = \frac{-1}{2}\text{س}^{\frac{-3}{2}}،\ \text{ص}'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\text{س}^{\frac{-5}{2}}،\ ....،\ \text{ص}^{(\text{ن})} = \frac{(-1)^{\text{ن}}\ 1\cdot 3\cdot 5......(2\text{ن}-1)\text{س}^{(\text{ن}+\frac{1}{2})}}{2^{\text{ن}}}$$

لبرهان هذا الدستور نتبع طريقة التراجع (الاستقراء) فنفرض انه صحيح من اجل ن بعد برهنا صحته من اجل ن =١، ن = ٢، ولنبرهن انه صحيح من اجل ن + ١ وذلك بان نشتق العلاقة الأخيرة فنجد:

$$\text{ص}^{(\text{ن}+1)} = \frac{(-1)^{\text{ن}}\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot(2\text{ن}-1)}{2^{\text{ن}}}\times -(\text{ن}+\frac{1}{2})\text{س}^{-\left(\text{ن}+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\text{ص}^{(\text{ن}+1)} = \frac{(-1)^{\text{ن}+1}\ 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\text{ن}-1)(2\text{ن}+1)}{2^{\text{ن}+1}}\text{س}^{-\left(\text{ن}+\frac{3}{2}\right)}$$

ونلاحظ أن هذه العلاقة تنتج عن الدستور الأخير من (١) بعد أن نبدل فيه ن بـ ن + ١وهذا ما يثبت لنا صحة هذا الدستور مهما كانت قيمة العدد الصحيح ن.

اما لحساب المشتق من المرتبة ن للتابع د=جاأس فنكتب على التوالي:

$$\text{د}' = \text{أ جتا أس} = \text{أ جا}\left(\text{أس}+\frac{\pi}{2}\right)،\ \text{د}'' = \text{أ}^2\text{جا}\left(\text{أس}+2\frac{\pi}{2}\right)........،\ \text{د}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}}\text{جا}\left(\text{أس}+\text{ن}\frac{\pi}{2}\right)$$

نبرهن بطريقة التراجع قيمة هذا الدستور من أجل قيمة لـ ن بعد ان حققناه من أجل ن = ٢ ، ن = ١ بالطريقة ذاتها نبرهن أن المشتق من المرتبة ن للتابع د = جتا أ س هو:

$$\text{ص}^{(\text{ن})} = \text{أ}^{\text{ن}}\text{جا}\left[\text{أس}+(\text{ن}+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

لحساب المشتق من المرتبة ن للتابع د = لو (١ + س) فإننا نكتب على التوالي:

$$\text{د}' = \frac{1}{1+\text{س}} = (1+\text{س})^{-1}،\ \text{د}^{(\text{ن})} = (-1)(1)(1+\text{س})^{-2}،.....$$

$$د^{(ن)}=(-١)^{ن-١}\cdot ١\cdot ٢\,.....(ن-١)(١+س)^{-ن}$$

نبرهن صحة هذا الدستور من اجل كل قيمة لـ ن بطريقة التراجع التي استعملناه في مطلع هذا التمرين.

أما لحساب المشتق من المرتبة ن للتابع د= $هـ^{س}$ جا س فإننا نفرض ع = $هـ^{س}$، ل = جاس ونطبق دستور لايبنز المتعلق باشتقاق جداء تابعين بعد أن نلاحظ أن المشتقات المتتالية للتابع ع = $هـ^{س}$ كلها متساوية بينما تعطى المشتقات المتتالية للتابع جاس بالدستور التالي:

$$ل^{(ن)}=جا\left(س+ن\frac{\pi}{٢}\right)$$

ويكون عندها:

$$د^{(ن)}=هـ^{س}\left[جاس+\frac{ن}{١}جا\left(س+\frac{\pi}{٢}\right)+\frac{ن(ن-١)}{٢!}جا(س+\frac{٢\pi}{٢})+.....+جا\left(س+ن\frac{\pi}{٢}\right)\right]$$

١٠. احسب المشتق ذا المرتبة الخمسين للتابع ص = $س^{٢}\,هـ^{٢س}$ إن هذا التابع جداء تابعين لذا نفرض

ع=$هـ^{٢س}$، ل=$س^{٢}$ **ونجد على التوالي:**

$$ل'=٢س\ ،\ ل''=٢،\ ل^{(٣)}=٠،\ ل^{(٤)}=٠،\ (ن\geq ٣).$$

$$ع'=٢هـ^{٢س}\ ،\ ع''=٢^{٢}\,هـ^{٢س}\ ،.....،ع^{(ن)}=٢^{ن}\,هـ^{٢س}$$

إذا طبقتا دستور لايبنز فإننا نلاحظ أن جميع حدوده معدومة إلا الحدود الثلاثة الأولى التي تحوي على الترتيب ل'' ، ل' ، ل فيكون:

$$ص^{(ن)}=٢^{ن}\,هـ^{٢س}.س^{٢}+ن٢^{ن-١}\,هـ^{٢س}.٢س+\frac{ن(ن-١)}{٢}.٢^{ن-٢}\,هـ^{٢س}.٢$$

$\text{ص}^{(\text{ن})} = ٢^{\text{ن}}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} \left[\text{س}^{٢} + \text{ن}\text{س} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٤}\right]$ إذا بدلنا في هذه العلاقة ن بـ ٥٠ فإننا نجد المشتق ذا المرتبة الخمسين

$$\text{ص}^{(٥٠)} = ٢^{(٥٠)}\, \text{هـ}^{٢\text{س}} \left[\text{س}^{٢} + ٥٠\text{س} + \frac{٥٠(٤٩)}{٤}\right]$$

١١- تعرف كثيرات حدود (لوجاندر Legender) بالعلاقة:

$$\text{ي}_{\text{ن}}(\text{س}) = \left[(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}}\right]^{(\text{ن})}$$

أي المشتق من المرتبة ن للقوة $(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}}$

برهن صحة العلاقتين:

$$(١)\quad (\text{س}^{٢}-١)\,\text{ي}''_{\text{ن}}(\text{س}) + ٢\text{س}\,\text{ي}'_{\text{ن}}(\text{س}) - \text{ن}(\text{ن}+١)\,\text{ي}_{\text{ن}}(\text{س}) = ٠$$

$$(٢)\quad \text{ي}'_{\text{ن}+١}(\text{س}) - (٤\text{ن}+٢)\,\text{س}\,\text{ي}_{\text{ن}}(\text{س}) + ٤\text{ن}^{٢}\,\text{ي}_{\text{ن}-١}(\text{س})$$

الحل:

لنفرض التركيب $(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}+١}$ ولنأخذ مشتقة من المرتبة ن+٢ بطريقتين:

أولاً: باعتباره مؤلفاً من جداء تابعين $(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}}\,(\text{س}^{٢}-١)$ ولنطبق من أجل ذلك دستور لايبنر فنجد: $[(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}}\,(\text{س}^{٢}-١)]^{(\text{ن}+٢)} = (\text{س}^{٢}-١)\,[(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}}]^{(\text{ن}+٢)} + ٢\,(\text{ن}+٢)\,[(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}}]^{(\text{ن}+١)}\,\text{س} + (\text{ن}+٢)\,(\text{ن}+١)\,[(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}}]^{(\text{ن})}$

وإذا ذكرنا تعريف كثير حدود لوجاندر فإن هذه العلاقة تأخذ الشكل:

$$(٣)\quad \text{ي}'_{\text{ن}+١} = (\text{س}^{٢}-١)\,\text{ي}''_{\text{ن}}(\text{س}) + ٢(\text{ن}+٢)\,\text{س}\,\text{ي}'_{\text{ن}}(\text{س}) + (\text{ن}+١)(\text{ن}+٢)\,\text{ي}_{\text{ن}}(\text{س})$$

ثانياً: بأن نشتق مرة واحدة مباشرة بالنسبة لـ س ثم نشتق من المرتبة (ن+ ١) بتطبيق دستور لاينز فيكون:

$$[(\text{س}^{٢} - ١)^{\text{ن}+١}]^{(\text{ن}+٢)} = [٢(\text{ن}+١)\ (\text{س}^{٢} - ١)^{\text{ن}}\ \text{س}]^{(\text{ن}+١)} = ٢(\text{ن}+١)$$

$$[(\text{س}^{٢} - ١)^{\text{ن}+١}]^{(\text{ن}+١)}\ \text{س} + ٢\ (\text{ن} + ١)^{٢}\ [(\text{س}^{٢}-١)^{\text{ن}}]^{(\text{ن})}$$

إلى تعريف ي ن (س) تأخذ هذه العلاقة بالشكل: (٤) $\text{ي}'_{\text{ن}+١}(\text{س}) = ٢\ (\text{ن} + ١)\ \text{ي}'_{\text{ن}}(\text{س}) - \text{ن}\ (\text{ن}+١)\ \text{ي}_{\text{ن}}(\text{س}) = ٠$ وهي العلاقة (١) لمطلوب برهانها.

طريقة ثانية: لنفرض د = (س^{٢} – ١)$^{\text{ن}}$ ثم نأخذ المشتق اللوغارتمي للطرفين فنجد: $\dfrac{\text{د}'}{\text{د}} = \dfrac{٢\text{ن}\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

ومنه= $\text{د}'\ (\text{س}^{٢} - ١)^{\text{ن}} = ٢\text{ن}\ \text{س}\ \text{د}$ لنأخذ الآن المشتق من المرتبة (ن+١) للطرفين فنجد:

$$\text{د}^{(\text{ن}+٢)}(\text{س}^{٢}-١) + ٢(\text{ن}+١)\text{د}^{(\text{ن}+١)}\text{س} + \text{ن}(\text{ن}+١)\text{د}^{(\text{ن})} = ٢\text{ن}\,\text{د}^{(\text{ن}+١)}\text{س} + ٢\text{ن}(\text{ن}+١)\text{د}^{(\text{ن})}$$

ومنه بعد أن نلاحظ أن:

$$\text{ي}''_{\text{ن}}(\text{س}) = \text{د}^{(\text{ن}+٢)}،\ \text{ي}'_{\text{ن}}(\text{س}) = \text{د}^{(\text{ن}+٢)}،\ \text{ي}_{\text{ن}}(\text{س}) = \text{د}^{(\text{ن})}$$

$$(\text{س}^{٢} - ١)\ \text{ي}''_{\text{ن}}(\text{س}) + ٢\ \text{ي}'_{\text{ن}}(\text{س}) - \text{ن}\ (\text{ن}+١)\ \text{ي}_{\text{ن}}(\text{س}) = ٠$$

وهي العلاقة رقم(١) المطلوب برهانها.

لبرهان العلاقة (٢) نطبق لاينبز على ي ن + ١ بالشكل التالي:

$$\text{ي}_{\text{ن}+١}(\text{س}) = [(\text{س}^{٢} - ١)^{\text{ن}}\ (\text{س}^{٢} - ١)]$$

$$= [(\text{س}^{٢} - ١)^{\text{ن}}]\ (\text{ن}+١)\ \ (\text{س}^{٢} - ١) + ٢\ (\text{ن}+١)$$

$$\text{س}\ [(\text{س}^{٢} - ١)^{\text{ن}}]^{\text{ن}} + \text{ن}\ (\text{ن}+ ١)\ [(\text{س}^{٢} - ١)^{\text{ن}}]^{(\text{ن}-١)}$$



واستناداً إلى تعريف $ي_{ن}$ (س) يمكننا أن نكتب:

(٥) $ي_{ن+١}(س) = (س^{٢} - ١)\, يَ_{ن}(س) + ٢(ن + ١)\, س\, ي_{ن}(س) +$
$ن(ن+١)\, [(س^{٢} - ١)^{ن}]^{(ن-١)}$

من جهة ثانية يمكننا أن نشتق مرة واحدة ثم نطبق دستور لاينبز على $ي_{ن+١}$ (س) بالشكل التالي:

$[(س^{٢} - ١)^{ن+١}]^{(ن+١)} = [٢(ن+١)\, س\, (س^{٢} - ١)^{ن}]^{(ن)} = ٢(ن+١)\, س$
$[(س^{٢} - ١)^{ن}]^{(ن)} + ٢ن(ن+١)\, [(س^{٢} - ١)^{ن}]^{ن-١}$

(٦) $ي_{ن+١}(س) = ٢(ن+١)\, س\, ي_{ن}(س) + ٢ن(ن+١)\, [(س^{٢}-١)^{ن}]^{(ن-١)}$

لنضرب العلاقة (٥) بـ (٢) ومن ثم تطرح العلاقة (٦) منها فنجد:

(٧) $ي_{ن+١}(س) = ٢(س^{٢} - ١)\, يَ_{ن}(س) + ٢(ن+١)\, س\, ي_{ن}(س)$

ولكن: $يَ_{ن}(س) = [(س^{٢} - ١)^{ن}]^{(ن+١)} = [٢ن\, (س^{٢} - ١)^{ن-١}\, س]^{(ن)} =$
$٢ن\, س\, [(س^{٢} - ١)^{ن-١}]^{(ن)} + ٢ن^{٢}\, [(س^{٢} - ١)^{ن-١}]^{(ن-١)}$
$يَ_{ن}(س)\ ٢ن\, س\, يَ_{ن-١}(س) + ٢ن^{٢}\, ي_{ن-١}(س)$
ولكن استناداً الى العلاقة (٧) نجد:

$ي_{ن+١}(س) = ٢(س^{٢} - ١)\, [٢ن\, س\, يَ_{ن-١}(س) + ٢ن^{٢} ي_{ن-١}(س)] +$
$٢(ن+١)\, س\, ي_{ن}(س)$

$ي_{ن+١}(س) = ٤ن\, س\, (س^{٢} - ١)\, يَ_{ن-١}(س)\ ٤ن^{٢}(س^{٢} - ١)\, ي_{ن-١}(س) + ٢(ن+١)\, س\, ي_{ن}(س)$ وإذا بدلنا في العلاقة (٧) ن بـ ن-١

فإننا نستخرج قيمة يَ ن -١ (س) ويكون

٢ (س٢ – ١) يَ ن-١ (س) = ي ن (س) ٢ (ن + ١) س ي ن (س)

لننقل هذه القيمة في العلاقة التي سبقتها فنجد:

ي ن+١ (س) = ٢ ن س [ي ن (س) – ٢ ن س ي ن -١ (س)] + ٤ ن٢ (س٢ – ١) ي ن+١ (س) + ٢ (ن + ١) س ي ن (س)

بعد الاصطلاح والاختصار نجد:

ي ن+١ (س) = (٤ ن + ٢) ي ن (س) – ٤ ن٢ ي ن-١ (س) ومنه:

ي ن+١ (س) – (٤ ن +٢) ي ن (س) + ٤ ن٢ ي ن-١ (س)= ٠

وهي العلاقة الثانية المراد برهانها:



تمارين للحل

احسب المشتقات التوابع: (١-١)

١٢ - $\text{س}^3(\text{س}^2-1)^2$ ١٣ - $\dfrac{\text{س}}{\text{س}^2-1}$ ١٤- $\dfrac{\text{س}^2+\text{س}+1}{\text{س}^2+\text{س}+1}$

١٥- $\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}^2-2\text{س}+2)$ ١٦- $\text{س}(1-\text{س}^2)^{\frac{1}{2}}$ ١٧- $\text{لو}\dfrac{1+\sqrt{\text{س}^2+1}}{\text{س}}-\sqrt{\text{س}^2+1}$

١٨- $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\,\text{لو}\dfrac{\text{س}^2+\sqrt{2}\,\text{س}+1}{\text{س}^2-\sqrt{2}\,\text{س}+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{قوس ظا}\dfrac{\text{س}\sqrt{2}}{1-\text{س}^2}$

١٩- برهن أن كلا من التابعين $\text{هـ}^{\text{أس}}$ جا ب س. $\text{هـ}^{\text{أس}}$ جتا ب س يحقق العلاقة:

$\text{ص}''-2\text{أص}'+(\text{أ}^2+\text{ب}^2)\,\text{ص}=0$

٢٠- برهن أن التابع: $\dfrac{\text{جا(م قوس جتا س)}}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$ يحقق المعادلة:

$(\text{س}^2-1)\text{ص}''+3\text{س ص}'-(\text{م}^2-1)\text{ص}=0$

٢١- $\text{ص}=(\text{لو س})^{\text{س}}$ **٢٢-** $\text{ص}=(\text{جا س})^{\text{س}}$ **٢٣-** $\text{ص}=\text{س}^{\text{س}^3}$

٢٤- احسب المشتقات من التربة ن للتابعين $\text{س هـ}^{\text{س}}$، $\text{هـ}^{\text{س}}$

٢٦- احسب قيم التوابع القطعية من أجل س =٠ و س= لو٢ تحقق من صحة الدساتير التالية:



٢٧- ظا (قطع)(س ± ص) = $\frac{\text{ظا (قطع)س ± ظا (قطع)ص}}{\text{١ ± ظا (قطع)س ظا (قطع)ص}}$

٢٨- ظتا (قطع)(س ± ص) = $\frac{\text{١ + ظتا (قطع)س ظتا (قطع)ص}}{\text{ظتا (قطع)س ± ظتا (قطع)ص}}$

٢٩- جا (قطع) $\frac{\text{م}}{٢}$ = ± $\left(\frac{\text{١ - جتا (قطع)م}}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}$

٣٠- جتا (قطع) $\frac{\text{م}}{٢}$ = ± $\left(\frac{\text{١ + جتا (قطع)م}}{٢}\right)^{\frac{١}{٢}}$

احسب مشتقات التوابع التالية: (١- ٢)

١- ص = جتا (قطع)(٤ - ٣س)

٢- ص = جا (قطع)(٢س - ١)

٣- ٣ - ص = جتا (قطع)(٤ - ٣س)

٤- ص = قا (قطع)(١ - س ^{٣})

٥- ص = ظا (قطع) $\frac{\text{١٦س - ١}}{٥}$

٦- ص = جتا (قطع)س ^{٢}

٧- ص = جتا (قطع)هـ $^{\text{س}}$

٨- ع = هـ $^{\text{جا (قطع)س}}$

٩- ص = هـ $^{\text{س}}$ ظا (قطع)س

١٠- ص = لوظا $\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$

١١- ص = لو جتا (قطع)س

١٢- ص = لوجا (قطع)س

برهن صحة العلاقات التالية:

١٣- $\text{قوس ظتا(قطع)س} = \text{قوس ظا(قطع)}\dfrac{1}{\text{س}}$

١٤- $\text{قوس ظا(قطع)س} = \text{قوس جا(قطع)}\dfrac{\text{س}}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$

١٥- $\text{قوس جا(قطع)س} = \text{قوس جتا(قطع)}\sqrt{1+\text{س}^2}$

١٦- $\text{قوس ظتا(قطع)س} = \text{قوس جا(قطع)}\dfrac{1}{\sqrt{\text{س}^2-1}}$

احسب مشتقات التوابع التالية:

١٧- $\text{جتا(قطع)}\dfrac{\text{س}}{3}$

١٨- قوس ظا(قطع)ع س

١٩- $\text{قوس ظتا(قطع)}(2\text{س}-1)$

٢٠- قوس جا(قطع)س

٢١- $(\text{قوس جا(قطع)}3\text{س})^2$

٢٢- س قوس جا(قطع)س

٢٣- احسب المشتق ذا الرتبة الأربعين للتابع $\text{ص} = \text{س}^2\,\text{جا س}$

٢٤- إذا فرضنا: $\text{د} = \text{س}^{\text{ن}-1}\,\text{هـ}^{\frac{1}{2}}$ **برهن أن** $\text{د}^{(\text{ن})} = \dfrac{(-1)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+1}}$

❖ احسب مشتقات التوابع التالية:

٢٥- $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}^2+1}$

٢٦- $\text{ص} = (\text{س}^2+9)^{\frac{3}{2}}$

٢٧- $\text{ص} = (3\text{س}^2-6\text{س}+11)^{\frac{2}{3}}$

٢٨- $\text{ص} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\text{أ}\text{س}^2+\text{ب}\text{س}+\text{جـ}}}$

٢٩- $\text{ص} = \text{س}^3(\text{س}^2+1)^{\frac{3}{2}}$

٣٠- $\text{ص} = \text{س}^2\sqrt{\text{س}^2+9}$

٣١- $\text{ص} = \sqrt{(-1)^2-1}$

٣٢- $\text{ص} = \sqrt{\sqrt{\text{أ}}+\sqrt{\text{س}-\text{أ}}}$

٣٣- $\text{ص} = \left(1-\sqrt{\text{س}^2+1}\right)^{\frac{3}{2}}$

أوجد ميل المماس للمنحنيات المعرفة بالمعادلات التالية في النقاط المبينة بجانب كل منها:

٣٤- $ص = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$: (٣،٤)، (−٤،٣)

٣٥- $ص = س^{٢}(٢س - ٣)^{٢}$: (٢،٤)، (−١،٢٥)، $\left(\frac{٣}{٤}، \frac{٨١}{٦٤}\right)$

$ص = \frac{٣س}{\sqrt{س^{٢} - ٩}}$: $\left(٥، \frac{١٥}{٤}\right)$

احسب المشتقات من المرتبة الثانية للتوابع التالية:

٣٦- $ص = \sqrt{س^{٢} - ٤}$

٣٧- $ص = (٤س + ٧)^{\frac{٣}{٢}}$

٣٨- $ص = س^{٣}(٧س + ١)^{٢}$

*** احسب المشتق من المرتبة ن للتوابع التالية حيث نفرض ن > ١:**

٣٩- $ص = \frac{١ + س}{١ - س}$

٤٠- $ص = \frac{س^{٢}}{س - ١}$

❖ احسب مشتقات التوابع المعرفة بالعلاقات التالية حين نعتبر س متحولا مستقلا:

٤١- $ص^{٢} - ٤س = ٠$

٤٢- $س^{٢} + ص^{٢} - ١٦ = ٠$

٤٣- $٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٣٦$

٤٤- $س ص = ٣٢$

٤٥- $\frac{س^{٢}}{م^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

٤٦- $س^{٢} + ص^{٢} + ٢م ص = ٠$

٤٧- احسب المشتقات من الرتبة الثانية للتوابع التي يحويها التمرين السابق.

٤٨- احسب ميل مماس المنحنيات المعرفة بالمعادلات التالية في النقاط المبينة

بجانب كل منها.

٤٩- $\text{س}^{3}+\text{ص}^{3}+2\text{س}^{2}-\text{سص}-3\text{س}+4\text{ص}=0$ $(0،0)$

٥٠- $\text{س}^{3}\,\text{ص}^{3}-\text{سص}^{3}+\text{ص}-14=0$ $(3،2)$

٥١- $\text{ص}^{3}=\dfrac{\text{س}+4}{3\text{س}+8}$ $(6،1)$

٥٢- $\text{ص}^{2}=\dfrac{3\text{س}}{\text{س}^{2}+9}$ $\left(4،\dfrac{-8}{5}\right)$

احسب مشتقات التوابع التالية:

٥٣- $\text{ص}=\text{ظا}(\text{ا}\,\text{س}^{2})$

٥٤- $\text{ص}=\text{جا}\left(2\text{س}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

٥٥- $\text{ص}=\text{جا}4\text{س}$

٥٦- $\text{ص}=\text{ظا}^{4}\,3\text{س}$

٥٧- $\text{ص}=\text{س}^{2}\,\text{ظا}^{2}\,\text{س}$

٥٨- $\text{ص}=\text{س}^{2}\,\text{جا}3\text{س}$

٥٩- $\text{ص}=\text{جاس}\,\text{ظاس}$

٦٠- $\text{ص}=\text{ظا}^{3}\text{س}-3\text{س}$

٦١- $\text{ص}=\text{س}^{2}\,\text{جا}^{3}\,4\text{س}$

٦٢- $\text{ص}=\dfrac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{س}^{2}}$

٦٣- $\text{ص}=\dfrac{\text{جتا}3\text{س}}{4\text{س}}$

٦٤- $\text{ص}=\dfrac{1}{\text{س}}\,\text{ظتا}^{2}\,\text{س}$

٦٥- $\text{ص}=\dfrac{1-\text{ظا}^{2}\,2\text{س}}{\text{ظا}2\text{س}}$

٦٦- $\text{ص}=\text{س}(1+\text{ظتاس})^{3}$

٦٧- $\text{ص}=\sqrt{1+\text{جاس}}$

٦٨- $\text{ص}=\text{جا}^{3}\,\text{س}^{2}$

٦٩- $\text{ص}=\dfrac{\text{جا}3\text{س}}{1+\text{جا}3\text{س}}$

٧٠- $\text{ص}=(1-\text{جتا}4\text{س})^{\frac{3}{2}}$

احسب مشتقات التوابع التالية: (١ - ٣) :

١- $\text{ص}=\text{قوس جتا}\left(\dfrac{3\text{س}}{4}\right)$

٢- $\text{ص}=\text{قوسجا}\left(\dfrac{\text{س}}{5}\right)$

٣- $\text{ص}=\text{قوسجا}4\text{س}$

٤- $\text{ص}=\dfrac{1}{\text{ا}}\,\text{قوس ظتا}\,\dfrac{\text{س}}{\text{ا}}$



٥- ص= قوس ظتا س^{٢}

٦- ص= قوس جتا $\sqrt{س}$

٧- ص= قوس جا $\sqrt{س^{٢}-١}$

٨- ص= قوس ظتا $\frac{١}{س}$

٩- ص= قوس جتا $\sqrt{\frac{س}{٣}}$

١٠- ص= قوس ظتا $\frac{س^{٢}}{م^{٢}}$

١١- ص= قوس جا $\frac{٢}{س-١}$

١٢- ص= قوس جا س^{٢}

١٣- ص= $\sqrt{\frac{٧}{٢}}$ قوس ظا $\frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٢}}$ س

١٤- ص= قوس قا س^{٢}

١٥- ص= قوس ظا $\left(\frac{٣س}{٥}\right)$

احسب مشتقات التوابع التالية:

١٦- ص= لو ٥س

١٧- ص= لو(٣س+٧)

١٨- ص= لو(س-٢)

١٩- ص= لو(٤س^{٢}+١)

٢٠- ص= لو(س^{٣}-٩)

٢١- ص= لو(١٥-٨س)

٢٢- ٥ = لو(٤ك-٤)^{٢}(٣ك+٣)^{٢}

٢٣- ص= لو(٥س+١)^{٢}

٢٤-٢٤-ص= لو س^{٢}(٣س+١)

٢٥- ص= لوظا $\left(س+\frac{\pi}{٤}\right)$

٢٦-٢٦-ص= لو جتا٣س

٢٧- ص= لوجا س

٢٨- ص= لو٢جا٣س

٢٩- ص= لو ظتا $\frac{٣}{٤}$س

٣٠- ص= لو قا $\frac{١}{٢}$س

٣١- ص= لو(لو٣ جتا س)

٣٢- ص= $\sqrt{لو س}$

٣٣- ص= لو[لو(س+١)]

٣٤- ص= لو $\left(\frac{١-جا س}{١+جا س}\right)^{\frac{١}{٢}}$

٣٥- ص= $\frac{لو س}{س}$

٣٦- $\text{ص}=\dfrac{\text{لو جتاس}}{\text{جتاس}}$

٣٧- $\text{ص}=(\text{س}^{٢}+٤)^{٣}(\text{س}^{٢}-٩)^{٢}$

٣٨- $\text{ص}=(\text{س}+٣)^{٤}(\text{س}-١)^{٣}$

٣٩- $\text{ص}=(\text{س}^{٢}-٦)^{\frac{٣}{٢}}(\text{س}^{٤}+٧)^{\frac{٥}{٢}}$

٤٠- $\text{ص}=(٢\text{س}+٥)^{\frac{١}{٢}}(٣\text{س}-١)^{\frac{٢}{٣}}$

٤١- $\text{ص}=\dfrac{(\text{س}+١)^{٢}}{(\text{س}-٣)^{٣}}$

٤٢- $\text{ص}=\dfrac{(٣\text{س}^{٣}-٥)^{٥}}{(\text{س}^{٢}-٩)^{٣}}$

٤٣- احسب المشتقة من الرتبة ن للتابع ص= لوس

احسب مشتقات التوابع التالية بأخذ لوغاريتم الطرفين:

٤٤- $\text{ص}=\text{هـ}^{\frac{\text{س}^{٢}}{٢}}$

٤٥- $\text{ص}=\text{هـ}^{٢\text{س}+١}$

٤٦- $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}}$

٤٧- $\text{ص}=\text{هـ}^{٣\text{س}}$

٤٨- $\text{ص}=\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

٤٩- $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{ظاس}}$

٥٠- $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{س}^{٢}+٤}$

٥١- $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{جاس}}$

٥٢- $\text{ص}=\text{س لو هـ}^{\text{س}}$

٥٣- $\text{ص}=\text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{جتا}٣\text{س}$

٥٤- $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{لوس}}$

٥٥- $\text{ص}=\text{قوسجا هـ}^{٢\text{س}}$

٥٦- $\text{ص}=\text{قوس قا هـ}^{\text{س}}$

٥٧- $\text{ص}=\text{س}^{٣\text{س}}$

٥٨- $\text{ص}=(\text{لوس})^{\text{س}}$

٥٩- احسب المشتق من الرتبة ن للتابع $\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

٦٠- $\text{جا(قطع)}\ \dfrac{\text{س}}{٢}$

٦١- $\text{جتا(قطع)}(\text{م}-٣\text{س})$

٦٢- $\text{ظا(قطع)}\dfrac{١٦\text{س}-١}{٥}$

٦٣- $\text{هـ}^{\text{س}}\text{ظا(قطع)س}$

٦٤- $\text{جتا(قطع)هـ}^{\text{س}}$

٦٥- لو جتا(قطع)س

٦٦- لوظا (قطع) $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ ٦٧- لو ظتا (قطع) $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$

الأجوبة:

٢٦- $\text{٣س}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{+٩}}$

٢٨- $\frac{-(\text{٢أس+ب})}{\text{٣}(\text{أس}^{\text{٢}}\text{+بس+جـ})^{\frac{\text{٣}}{\text{٤}}}}$

٢٩- $\text{٣س}^{\text{٢}}(\text{٢س}^{\text{٢}}\text{+١})\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}\text{+١}}$

٣١- $\frac{\text{٣}(\text{د}-\text{١})^{\text{٢}}}{\text{٢}\sqrt{(\text{د}-\text{١})^{\text{٣}}-\text{١}}}$

٣٢- $\frac{\text{١}}{\text{٤}\sqrt{\text{س}-\text{أ}}\,(\sqrt{\text{أ}}+\sqrt{\text{س}-\text{أ}})}$

٣٤- $\frac{-\text{٣}}{\text{٤}}$ ، $\frac{-\text{٤}}{\text{٣}}$

٣٥- $\frac{-\text{٢٧}}{\text{٦٤}}$

٣٧- $\frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{٤س+٧}}}$

٣٨- $\text{٢س}(\text{٧٠س}^{\text{٢}}\text{+٨٤س+٣})$

٤٠- $\frac{(-\text{١})^{\text{ن}}\,\text{ن!}}{(\text{س}-\text{١})^{\text{ن+١}}}$

٤١- $\frac{\text{٢}}{\text{ص}}$

٤٣- $\frac{-\text{٤س}}{\text{٩ص}}$

٤٤- $\frac{-\text{ص}}{\text{س}}$

٤٥- $\frac{-\text{ب}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{أ}^{\text{٢}}\text{ص}}$

٤٩- $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

٥١- $\frac{-\text{١}}{\text{١٥}}$

٥٣- $-\text{٢أس قتا}^{\text{٢}}(\text{أس}^{\text{٢}})$

٥٦- $\frac{\text{١٢جا}^{\text{٢}}\text{٣س}}{\text{جتا}^{\text{٥}}\text{٣س}}$

٥٨- ظاس قتاس+جاس

٦٤- $-(\text{٢س جتا قتا}^{\text{٢}}\text{س+ظتاس})\frac{\text{ظتاس}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٦٢- $\frac{\text{٢جاس}(\text{س جتاس}-\text{جاس})}{\text{س}^{\text{٣}}}$

٦٦- $-(\text{١+ظتلس})^{\text{٢}}(\text{١+ظتلس}-\text{٣س جتا قتلس})$

٧٠- $\text{٦جا٤د}\sqrt{\text{١}-\text{جتا٤د}}$

٣- $\frac{\text{٤}}{\sqrt{\text{١}-\text{١٦س}^{\text{٢}}}}$

٥- $\frac{٢س}{١+س^{٤}}$

٧- $\frac{س}{\sqrt{٣س^{٢}-س^{٤}-٢}}$

٩- $\frac{-\sqrt{٣}}{٢\sqrt{س}(س+٣)}$

١٠- $\frac{-٢م^{٢}س}{م^{٤}+س^{٤}}$

١٣- $\frac{٢}{٢+٧س^{٢}}$

١٤- $\frac{٣}{س\sqrt{س^{٦}-١}}$

١٦- $\frac{١}{س}$

١٨- $\frac{١}{س-٢}$

٢٠- $\frac{٣س^{٢}}{س^{٣}-٩}$

٢٤- $\frac{١٥}{٥س+١}$

٢٦- $-٣ظا٣س$

٢٧- ظتا س

٣١- $\frac{-قتاس\ جتا\ قتاس}{ظا٣\ ظتاس}$

٣٨- $(٧س+٥)(س+٣)^{٣}(س-١)^{٢}$

٤٠- $\frac{٧س+٩}{\sqrt{٢س+٥}\ \sqrt[٣]{س-١}^{\,٢}}$

٤٢- $\frac{٣س(٩س^{٣}-١٣٥س+١٠)(٣س^{٣}-٥)^{٤}}{(س^{٢}-٩)^{٤}}$

٤٣- $\frac{(-١)^{ن-١}(ن-١)!}{س^{ن}}$

٤٥- $٢هـ^{٢س+١}$

٤٧- $٣هـ^{٣س}$

٤٩- $هـ^{ظاس}\ قتا^{٢}س$

٥٣- $هـ^{٢س}(٢\ جتا٣س-٣جا٣س)$

٥٥- $\frac{٢هـ^{٢س}}{\sqrt{١-هـ^{٤س}}}$

٥٦- $\frac{١}{\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ١}}$

٥٧- $٣\text{س}^{٣\text{س}}(١ + \text{لوس})$

٥٨- $[١ + (\text{لوس}) . \text{لو لوس}][\text{لوس}]^{\text{س}-١}$

٥٩- $\text{هـ}^{\text{س}}(\text{س} + \text{ن})$

٦٠- $\frac{١}{٢}\ \text{جتا}(\text{قطع})\frac{\text{س}}{٢}$

٦١- $-٣\text{جا}(\text{قطع})(\text{م} - ٣\text{س})$

٦٢- $\frac{١٦}{٥}\ \text{جتا}(\text{قطع})^{-٢}\left(\frac{١٦\text{س} - ١}{٥}\right)$

٦٣- $\text{هـ}^{\text{س}}(\text{جتا}(\text{قطع})^{-٢}\text{س} + \text{ظا}(\text{قطع})\text{س})$

٦٤- $\text{هـ}^{\text{س}}\text{جا}(\text{قطع})\text{هـ}^{\text{س}}$

٦٥- $\text{ظا}(\text{قطع})\text{س}$

٦٦- $\frac{١}{\text{جا}(\text{قطع})\text{س}}$



مجموعات الأعداد

Sets Of Numbers



الفصل الخامس

مجموعات الأعداد

Sets Of Numbers

مجموعة الأعداد الطبيعية Set of Natural Numbers

مجموعة الأعداد الطبيعية هي أول بناء عددي يقابله الإنسان والتي تمثل في النظام ط = { ١، ٢، ٣،............}

أول من أنشأ الأعداد الطبيعية على أساس بديهات سميت باسمه هو العالم الإيطالي بيانو (Peano) وذلك في نهاية القرن التاسع عشر.

بديهات بيانو (pianos Axioms)

مجموعة الأعداد الطبيعية هي مجموعة من العناصر تتصف مما يلي:

١) تحتوي هذه المجموعة على عنصر يرمز له بالرمز ١.

٢) لكل عنصر في هذه المجموعة عنصر واحد فقط لاحق له.

٣) العنصر ١ ليس لاحقا لأي عنصر في هذه المجموعة.

٤) إذا كان أ، ب عنصرين في هذه المجموعة، فإن لاحق أ يختلف عن لاحق ب.

٥) أي مجموعة جزئية من هذه المجموعة تحتوي على العنصر أو تحتوي أيضاً على اللاحق لأي عنصر من عناصرهما، فإن هذه المجموعة الجزئية لابد أن تكون المجموعة بكاملها.



من الخواص الجبري لمجموعة الأعداد الطبيعية ما يلي:

أ) الجمع

إذا كان م، ب م جـ ∈ ط، فإن هناك عملية ثنائية تسمى الجمع (+) على ط تتصف بالخواص التالي:

١) م + ب ∈ ط

٢) م + ب = ب + م

٣) (م + ب) + جـ = م + (ب + جـ)

ب) الضرب

إذا كان م، ب، ج ∈ ط، فإن هناك عملية ثنائية تسمى الضرب (٠) على ط تتصف بالخواص التالي:

١) م. ب ∈ ط

٢) م. ب = ب. م

٣) (م. ب). جـ = م. (ب. جـ)

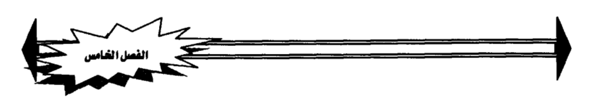
جـ) الترتيب

إذا كان م. ب ∈ ط، فإن

م= ب أو م> ب أو م< ب

هناك بعض الصفات التي لاتصف بها مجموعة الأعداد الطبيعية ومنها:

أ) عملية الطرح غير مغلقة على الأعداد الطبيعية، بمعنى أن إذا كان م،



ب ∋ ط، فإن أ- ب ليس من الضروري أن يكون عدد طبيعي.

ب) عملية القسمة غير مغلقة على الأعداد الطبيعية بمعنى أنه إذا كان أ، ب ∋ ط و ب ≠ ٠، فإن $\frac{أ}{ب}$ قد لا يكون عدد طبيعياً.

جـ) قد لا يكون هناك حل في مجموعة الأعداد الطبيعية للمعادلات، فمثلاً لا يوجد عدد طبيعي س حيث أن س + ٤ =٢

هذه العيوب كانت السبب في التفكير في وجود أعداد طبيعية سالبة- {-١، -٢، -٣،...}.

ولكن بين الأعداد الطبيعية والأعداد الطبيعية السالبة لا بد من وجود نقطة تعادل، وهذا ما يسمى بالصفر.

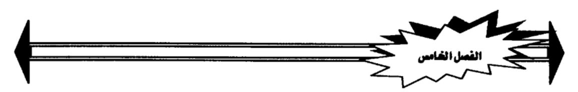
مجموعة الأعداد الطبيعية وسالبها والعدد صفر كلها تكون مجموعة الأعداد الصحيحة، ويرمز لذلك بالرمز ص، ص = { ٠ ،± ١، ± ٢، ±٣،........}.

في بعض الأحيان تسمى مجموعة الأعداد الطبيعية، مجموعة الأعداد الصحيحة الموجب ص + هناك صفة حيدة تتصف بها مجموعة الأعداد الصحيحة ص تساعد في حل المعادلات، هذه الخاصية هي خاصية الحذف أو الاختصار في حالة الجمع.

الاختصار

إذا كان أ، ب، جـ ∋ ص فإن أ + ب = أ+ جـ يؤدي إلى أن ب = جـ





من البديهات التي تحتاجها في بناء الكثير من الاستنتاجات حول الأعداد بديهة تسمى مبدأ الترتيب الجيد (Well - Ordering Principle)

مبدأ الترتيب الجيد

كل مجموعة جزئية غير خالية ع من ص+ لها عنصر أصغر ي

من الاستنتاجات الرئيسية التي بنيت على مبدأ الترتيب الجيد مبدأ الاستقراء الرياضي

مبرهنة:

نظرية ١ (مبدأ الاستقراء الرياضي)

لنفرض أن ع مجموعة جزئية غير خالية من ص+ تتصف بما يلي:

أ) ١ ∈

ب) إذا كان العدد الصحيح الموجب ك في ع، فإن ك+١ في ع عندئذ

ع = ص+

البرهان:

لنفرض أن ك هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تنتمي إلى ع والمطلوب الآن أن نبرهن أن

لفنرض أن ك $\neq \Phi$

من مبدأ الترتيب الجيد يستنتج أن هناك عنصر أصغر ك١ في ك وهذا العنصر أكبر من ١ لأن ١ ∈ ع





من الملاحظ أن $ك_١ - ١$ عدد صحيح موجب و أنه أصغر من $ك_١$، وهـذا يعني أن $ك_١ - ١$ في ع من الفرض نجد أن $ك_١ = (-١) + ١$ في ع، وهذا ينـاقض الفرض. إذن ك = Φ وهذا يوصلنا إلى أن ع = ص+.

عند استخدام مبدأ الاستقراء الرياضي في برهن جملة ي (ن) تتبع ما يلي:

١) نبرهن الجملة في حالة ن = ١، أي صحة ي (١).

٢) نبرهن صحة الجملة ي (جـ + ١) باستخدام صحة الجملـة ي (جـ) حيث جـ عدد صحيح موجب

مثال ١:

برهن أن

$$١+٢+٣+........+ن=\frac{ن(ن+١)}{٢}$$

الحل:

من الواضح أن ي (١) هي $١=\frac{١(١+١)}{٢}$

وهذه جملة صحيحة

إذا كانت ي (ن) جملة صحيحة، فإن ذلك يعني أن:

$$١+٢+٣+........+ك=\frac{ك(ك+١)}{٢}$$

برهنة هذه الجملة لكل الأعداد الموجبة ن لابد من برهن ي (ك + ١)





$$\text{١} + \text{٢} + \dots + \text{ك} + (\text{ك} + \text{١}) = (\text{١} + \text{٢} + \dots + \text{ك}) + (\text{ك} + \text{١})$$

$$= \frac{\text{ك}(\text{ك} + \text{١})}{\text{٢}} + \text{ك} + \text{١}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \left[\text{ك}(\text{ك} + \text{١}) + \text{٢}(\text{ك} + \text{١}) \right]$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} (\text{ك} + \text{١})(\text{ك} + \text{٢})$$

وهذا يوضح صحة الجملة ي (ك + ١)

هذا يعني أن ي(ن جملة صحيحة لكل الأعداد الصحيحة الموجهة ن ≥ ١



تمارين

١) إذا كان $م^ن$ حيث ن عدداً طبيعياً يعني $م^١ = م$، $م^{ك+١} = م^ك . م$

فبرهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن $(م.ب)^ن = م^ن . ب^ن$

٢) برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$$٤ + ٨ + ١٢ + ... + ٤ن = ٢ن(ن + ١)$$

٣) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن

$$١ + ٣ + ٦ + ١٠ + ... + \frac{ن(ن+١)}{٢} = \frac{ن(ن+١)(ن+٢)}{٦}$$

٤) برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$$٢ + ٢^٢ + ٢^٣ + ... + ٢^ن = ٢\ (٢^ن - ١)$$

٥) برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$$١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ... + ن^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$$

٦) إذا كانت $\{ع_ن\}_{ن=١}^{\infty}$ متتالية حيث أن $ع_١ = ١$، $ع_٢ = ١$، $ع_{ن+١} = ع_ن + ع_{ن-١}$ لكل ن $\geq$ ٢، فبرهن أن:

أ) $ع_{ن+١} < \left(\frac{٧}{٤}\right)^ن$ لكل ن $\geq$ ١

ب) $\sum_{ي=١}^{ن} ع_ي = ع_{ن+٢} - ١$ لكل ن $\geq$ ١



ج) $\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{٢\text{ي}-١} = \text{ع}_{٢\text{ن}}$ *لكل* $\text{ن} \geq ١$

د) $\sum_{\text{ي}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{٢\text{ي}} = \text{ع}_{٢\text{ن}+١} - ١$

٧) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن

$$١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \ldots\ldots + \text{ن}^٣ = \left[\frac{\text{ن}(\text{ن}+١)}{٢}\right]$$

٨) برهن باستخدام الاستقراء الرياضي أن

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{١٢} + \ldots\ldots + \frac{١}{\text{ن}(\text{ن}+١)} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}$$

٩) لنفرض أن $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{\text{ن}-١}$ ، $\text{س}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}^٣ + ٥\text{ن}}{٦}$ **برهن أن**

أ) ص $_{\text{ن}}$ عدد صحيح   ب) س $_{\text{ن}}$ عدد صحيح

١٠) إذا كان س $\in$ ح، فبرهن أن

$(١ + \text{س})^{\text{ن}} \geq ١ + \text{ن س}$

حيث ن عدد صحيح موجب

قابلية القسمة Divisibility

من النتائج الرئيسية في نظرية الأعداد نتيجة تسمى خوارزمية القسمة والتي تنص على أنه يمكن قسمة عدد صحيح إلى عدد صحيح آخر للحصول على باقي أصغر.



برهان هذه الحقيقة يعتمد على مبدأ الترتيب الجيد.

مبرهنة (خوارزمية القسمة):

إذا كان أ، ب عددان صحيحان حيث ب > ٠، فإن هناك عددان صحيحان ر، ل حيث ٠ ≤ ﺃ<ب و ﺃ=بل+ر

البرهان:

لنفرض أن

و = { ﺃ- س ب : س ∈ ص }

نبرهن أن و تحتوي على أعداد صحيحة موجبة

إذا كان س كبير بما فيه الكفاية وسالب، فإن ﺃ-سب>٠

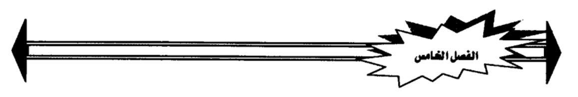
لنفرض أن ف = { ف∈ و : ف ≤ ٠ }

المجموعة ف تحتوي على عنصر أصغر ي ر (من مبدأ الترتيب الجيد) ونلاحظ أن ر ≤ ٠، ر=ﺃ-لب لبعض ل ندعي بأن ر < ب

لنفرض عكس ذلك، أي أن ر = ﺃ - ل ب ≤ ب

ومن ذلك ﺃ - (ل +) ب ≤ هذا يعني أ ن أ - (ل +) ب في المجموعة ق، ولكن ﺃ - (ل + ١) ب < ر وهذا يناقض كون ر عنصر اصغري في ف

يمكن توضيح وحدانية العددان ر، ل في النظرية السابقة كما يلي: لنفرض أن هناك رَ، لَ حيث أن ٠ ≤ رَ < ب، ﺃ = لَ ب + رَ



إذن | ر – رَ | = ب| ل – لَ |

من النظرية لدينا ٠ ≤ ر > ب وهذا يعني أن – ب > - ر ≤ ٠ وجميع ذلك مع المتباين٠ ≤ رَ > ب يعطي ب - > رَ – ر > ب وهذا يعني ان | رَ – ر | >ب

إذن ب | ل – لَ | > ب وهذا يعني ان ٠ ≤ | ل – لَ | > ١

وحيث أن:

| ل – لَ | عدد صحيح غير سالب، فإن ذلك يعني أن ل – لَ =٠

ومن ذلك ل = لَ والذي بدوره يعني أن ر = رَ

عند قسمة عدد صحيح على آخر غير صفري قد لا تكون النتيجة عدد صحيح، ولكن قد يكون اهتمامنا أكثر تركيزاً على الحالة التي يكون خارج قسمة عددين صحيحين عدد صحيح.

إذا ٲ ، ب عددين صحيحين حيث ب ≠ ٠، وكان جـ = $\frac{ٲ}{ب}$ أو (أ = ب جـ) حيث جـ عدد صحيح فإن ب يسمى قاسم (divisior) للعدد ٲ او يسمى ٲ عامل (factor) للعدد ا، يسمى العدد ا مضاعف (multiple) للعدد ب ٲ يسمى قابل للقسمة (divisible) على العدد ب.

تعريف: إذا كان ٲ، ب ∋ ص، و ٲ ≠ ٠، فإن العدد الصحيح ٲ يسمى قاسم (divisor) العدد ب بشرط وجود عدد صحيح وحيد ج حيث ب = ٲ ج.

رمزيا أ قاسم ب تكتب على الشكل ٲ|ب، ٲ لا يقسم ب تكتب على شكل ٲ χ ب.





هناك أسماء أخرى تطلق على خاصية قابلية القسمة ومنها (أ|ب تعني أن أ عامل على من عوامل العدد ب وكذلك تعني أن ب قابل للقسمة على العدد أ، أو أن ب مضاعف للعدد أ)

من تعريف القاسم تلاحظ أ ن ±أ | أ ، ±١ | أ ، أ | ٠ لكل عدد صحيح أ، ومن الواضح أنه إذا كان أ | ±١ فإن ذلك يعني أ ن أ = ±١

النظرية التالية توضح أهم الخواص الرئيسية لقابلية القسمة

مبرهنة

إذا كانت أ، ب، جـ ∈ ص، فإنه

١) إذا كان أ| ب، فإن أ جـ | ب جـ

٢) إذا كان أ | ب، ب | جـ، فإن أ | جـ

٣) إذا كان أ | ب، ب | أ ، فإن أ = ±ب.

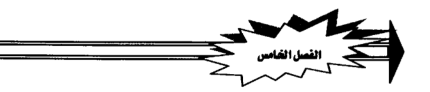
٤) إذا كان أ | ب، أ | جـ، فإن أ | (ب س + جـ ي) لكل س، ي ∈ ص

البرهان:

استخدام التعريف مباشرة يوضح برهان الخواص ١، ٢، ٣، ولهذا السبب نتركها للقارئ ونبرهن الفقرة (٤) أ| ب يعني أن هناك عدد صحيح ك حيث ب = أ ك،

أ| جـ يعني أ ن هناك عدد صحيح م حيث جـ = أ م





الآن إذا كان س ∋ ص، فإن

ب س = ٢ ك س

وإذا كان ي ∋ ص فإن

جـ ي = ٢ م ي

الآن

ب س + جـ ي = ٢ (ك س + م ي)

لاحظ أن ك س +م ي عدد صحيح، وهذا يعني أن ٢ | (ب س+ جـ ي)

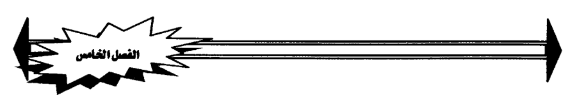
إذا كان ٢ ، ب ∋ ص، فإن العدد د يسمى قاسم مشترك (Common divisor) للعددين ب، ٢ إذا كان د | ب، د | ٢ .

من الواضح أن العدد ١ قاسم لكل عدد صحيح، ولهذا فإن مجموع القواسم المشتركة للعددين ٢، ب مجموعة غير خالية، في هذا المجموعة قاسم مشترك له أهمية كبيرة وهو القاسم المشترك الأعظم للعددين ٢، ب.

تعريف: إذا كان ب، أ عددان صحيحان حيث على الأقل أحدهما لا يساوي صفر، فإن القاسم المشترك الأعظم للعددين ب، ٢ ويرمز لذلك الرمز (٢، ب) هو العدد صحيح موجب ∋ حيث:

٢) د| ٢ ، د | ب

ب) إذا كان جـ | ٢ ، جـ | ب ، فإن جـ | د



من الواضح أن القاسم المشترك الأعظم (م، ب) هو أكبر الأعداد الصحيحة في مجموعة القواسم المشتركة للعددين ب، م.

القاسم المشترك الأعظم (م، ب) للعددين م، ب حيث أن أحدهما على الأقل لا يساوي صفر لا بد م، ن يكون وحيداً فإذا كان دَ، د كلاهما قاسم مشترك أعظم للعددين م، ب فإن د | دَ و دَ| د، ومن نظرية سابقة وضحنا أن د = ± د، و نظرة سريعة للتعريف توضح أن (م، ب) لا بد أن يكون عدد صحيح موجب، أي أن د = دَ.

النظرية التالية توضح وجود القاسم المشترك الأعظم.

مبرهنة:
إذا كان م، ب ∈ ص حيث أحدهما على الأقل لا يساوي صفر فإن (م، ب) موجود، وعلاوة على ذلك هناك عددان صحيحان ي، س حيث (م، ب) = أ ي + ب ي

البرهان:

لنفرض أن

ع = { أ ن + ب م : ن. م ∈ ص }

تحتوي على عدد غير صفري، لأن إذا كان أ ≠ ٠، فإن | أ | = أ ن + ب.. عندما نختار ن = ١ أو ن = ¯١

إذا كان س ∈ ع و س <٠، فإن – س ∈ ع لأنه:

إذا كان س = أ $ن_١$ + ب $م_١$، فإن – س = أ (– $ن_١$) + ب (– $م_١$)



إذا من مبدأ الترتيب الجيد يكون للمجموعة ع عنصر أصغري > حيث د>٠

هذا يعني أن هناك س، ي ∍ ص حيث د = أ س+ ب ي و أن د = (م، ب) ولتوضيح ذلك نطبق خوارزمية القسمة، أي أن هناك عددان صحيحان ر، ل حيث ٠ ≥ ر > د و م = ل د + ر.

وهذا يؤدي إلى أن

ر = م – ل د = م – ل (م س + ب ي)

= م (١ – ل س) + ب (– ل ي)

وهذا يعني أن ر ∍ ع والذي يناقض كون د عنصر أصغر ي في ع

إذن ر = ٠ وبذلك يكون د | و

بنفس النقاش يمكن توضيح أن د | ب، وهذا يعني أن د قاسم مشترك للعددين ب، م إذا كان ج| م و جـ| ب فإن جـ | (م س + ب ي)، ويعني ذلك أن جـ| د

إذن د = (م، ب)

إذا كان لا يوجد للعدد الصحيح ب أي قاسم عدا العددين –١، ١ والعدد ب نفسه، فانه يسمى عدد أولي (PRIME).

العددان الصحيحان م، ب (حيث على الأقل احدهما لا يساوي صفر) أوليان نسبيا

(CNETOTVELY PRIM). إذا كان فقط (م، ب) = ١.



من النتائج المهمة التي تبني العلاقة بين القاسم المشترك الأعظم للعددان الصحيحان أ ن ب وكونهما أوليا نسبيا النتيجة التالية.

> مبرهنة:
>
> إذا كان ص ∋ ᵃ ، ب حيث على الأقل احدهما لا يساوي صفر، فان ᵃ ، ب أوليان نسبيا إذا وإذا كان فقط هناك عددان صحيحان س، ي حيث أن ᵃ س + ب ي = ١

البرهان:

إذا كان أ، ب أوليان نسبيا، فإن (أ، ب) = ١، وهذا يعني وجود س، ي ص ∋

أما بالعكس وهو إذا كان أ س + ب ي = ١ حيث س، ي عددان صحيحان مناسبان وإذا كان (ᵃ ، ب) = د فان د| ᵃ و د د | ب وهذا يعني أن د |(ᵃ س + ب ي) والذي بدوره إلى أن د|١، وحيث أن د عدد صحيح موجب، فان ذلك يعني أن د= ١ والذي بدوره يعني أن ᵃ، ب أوليان نسبيا من المعروف انه إذا كان ᵃ | ب فان ᵃ | ك ب لكل عدد صحيح ك، ولكن كون أن ᵃ | ك ب قد لا يؤدي إلى أن ᵃ | ب، ومع فان النتيجة التالية توضح الشرط التي تؤدي إلى صحة ذلك.

> مبرهنة: إذا كان ᵃ، ب أوليان نسبيا وكان ᵃ | ب جـ ، فان ᵃ | جـ

البرهان:

حيث أن (ᵃ ، ب)=١، فان هناك عددان صحيحان س، ي يحققان ᵃ س





+ ب ي = ١ بالقرب في جـ تحصل على جـ= جـ (ﺃ س + ب ي) = ﺃ (جـ ى س) + (ب جـ) ي

من الواضح أن ﺃ | ﺃ، ومن المعطى أن ﺃ | ب جـ وبذلك يكون ﺃ |ﺃ جـ س + ب جـ ي وهذا يعني أن ﺃ |جـ

ومن النتائج التي يمكن أن تبني على هذه النظرية النتيجة التالية والتي يترك برهانها كتمرين للقارئ.

نتيجة (١):
إذا كان (ﺃ ، ب) = ١ و (ﺃ ، جـ) =١ ، فان (ﺃ ، ب جـ) = ١

إذا كان م عدد صحيح اكبر من العدد ١، فان م عدد أولي إذا كان لأي عدد صحيح ﺃ أما م | ﺃ أو (م، ﺃ) = ١، وهذا يعني انه إذا كان م عدد أولي لا يمكن تحليله إلى عوامل تختلف عن ١النتيجة التالية توضح انه إذا كان العدد أولي م قاسم لحاصل ضرب أعداد صحيحة فانه لابد أن يكون قاسما على الأقل لأحد هذه الأعداد.

مبرهنة: إذا كان م عدد أولي و م	(ﺃ ١، ﺃ ٢، ....،ﺃ ن) فان م	أي لبعض أي حيث ١ ≤ي≤ن .

البرهان:

إذا كان م | ﺃ١ فإن المطلوب قد حصل

لنفرض ان م ∤ ﺃ١ وهذا يعني أن (م، ﺃ١) = ١، ولكن م | ﺃ١ (ﺃ٢، ﺃ٣.... ﺃن) وهذا يؤدي إلى أن م | ﺃ٢، ﺃ٣.....أن، ومتابعة نفس النقاش يوصلنا





إلى أن م | $ا_ي$ لبعض ي حيث ١ ≤ ي≤ ن.

النظرية التالية توضح أن أي عدد صحيح ما هو إلا عدد أولي أو حاصل ضرب أعداد أولية.

مبرهنة: أي عدد صحيح أكبر من الواحد ما هو لا عدد أولي أو حاصل ضرب أعداد أولية

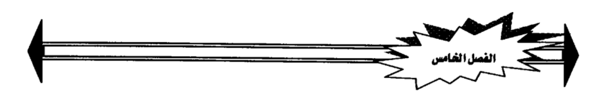
البرهان: لنفرض عدم صحة هذه الفرضية.

هذا يعني وجود عدد صحيح ن أكبر من ١ حيث ن لا يكون عدد أولي ولا هو حاصل ضرب أعداد أولية لنفرض أن المجموعة أتتكون مثل هذه الأعداد، من الواضح أن ا ≠ ϕ، ومن مبدأ الترتيب الجيد يكون للمجموعة ا عنصر أصغري م في ا ، وهذا يعني أن ا ب = م حيث ١ > ا > م و ١ > ب > م لاحظ أن ا > م و ب > م والعنصر م عنصر أصغري، وهذا يعني أن ا ∉ ا و ب∉ ا.

من تعريف المجموعة ا نجد أن ا، ب عددان أوليان أو أنهما حاصل ضرب أعداد أولية، وحيث أن م = ا ب فإن ذلك يؤدي إلى أن م حاصل ضرب أعداد أولية وهذا يناقض كون م عنصري في ا، والتناقض هذا يوضح صحة المبرهنة.

لقد تم توضيح وجود ووحدانية القاسم المشترك الأعظم للعددين الصحيين ا، ب ولكن لم تعطى طريقة توضيح إيجاد (ا، ب).





إيجاد القاسم المشترك الأعظم

إذا كان أ، ب عددان صحيحان موجبان حيث أ ≤ ب، فإنه من خوارزمية القسمة هناك عددان صحيحان ي، ر حيث ٠ ≤ر≤ ب و أ= ي ب+ر

إذا كان ر = ٠، فإن (أ، ب)، وإذا كان ر ≠ ٠ فإن هناك عددان صحيحان $ر_{١}$، $ي_{١}$ حيث ٠ ≤ $ر_{١}$ > ر و ب = $ي_{١}$ ر + $ر_{١}$

إذا كان $ر_{١}$ = ٠، فإن (أ، ب) = ر، وإذا كان $ر_{١}$ ≠ ٠، فإن هناك عددان صحيحان $ي_{٢}$، $ر_{٢}$ حيث ٠ ≤ $ر_{٢}$ > $ر_{١}$ و ر = $ي_{٢}$ $ر_{١}$ + $ر_{٢}$

ونستمر بنفس الكيفية حتى نحصل على

أ = ل ب + ر ، ٠ ≤ر> ب

ب = $ل_{١}$ ر + $ر_{١}$ ، ٠ ≤$ر_{١}$≤ر

ر = $ل_{٢}$ $ر_{١}$ + $ر_{١}$ ، ٠ ≤ $ر_{٢}$≤$ر_{١}$

$ر_{ن-١}$ = $ل_{ن+١}$ $ر_{ن}$ + $ر_{ن+١}$ ، ٠≤ $ر_{ن+١}$ > $ر_{ن}$

$ر_{ن}$ = $ل_{ن+٢}$ $ر_{ن+١}$

ويكون القاسم المشترك الأعظم للعددين أ، ب هو $ر_{ن+١}$

نلاحظ في هذا الأسلوب أن آخر باقي غير صفري هو القاسم المشترك الأعظم للعددين الصحيحين:

مثال:

أوجد (٣٠٦، ٥٦٥)



الحل : ٦٥٧ = ٢ (٣٠٦) + ٤٥

٣٠٦ = ٦ (٤٥) + ٣٦

٤٥ = ١ (٣٦) +٩

٣٦ = ٤ (٩)

وهذا يعني أن (٣٠٦، ٦٥٧) = ٩

النظرية التالية توضح أن أي عدد صحيح م >١ هو حاصل ضرب أعداد أولية بطريقة وحيدة بعيداً عن الترتيب.

مبرهنة (النظرية الأساسية للحساب)

مبرهنة: كل عدد صحيح أكبر من واحد يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة (إلا من حيث الترتيب) كحاصل ضرب أعداد أولية.

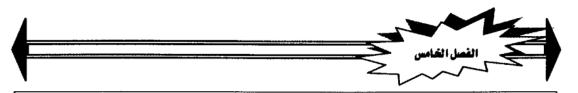
المضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين غير الصفرين م، ب هو العدد الصحيح الموجب جـ حيث:

م) م | جـ ب | جـ

ب) إذا كان م | جـ* ، ب |جـ* ، فإن جـ | جـ*

يرمز للمضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين م، ب بالرمز [م، ب]

النتيجة التالية توضح العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأعظم.



مبرهنة: إذا كان ﺃ، ب عددين صحيحين غير صفرين، فإن (ﺃ، ب) [ﺃ، ب] =ﺃ ب

النتيجة التالية توضح أنه إذا كان (ﺃ، ب) = ١، فإن [ﺃ، ب] = ﺃ ب والعكس صحيح.

مبرهنة: إذا كان ﺃ، ب عددين صحيحين غير صفرين، فإن [ﺃ، ب]= ﺃ ب إذا و إذا كان فقط (ﺃ، ب) = ١

تمارين:

١) إذا كان ﺃ | ب، ب |ﺃ فبرهن أن ﺃ = ± ب

٢) إذا كان ﺃ | ب، ب |جـ فبرهن أن ﺃ |جـ

٣) إذا كان ﺃ، ب، جـ أعداد صحيحة وكان ﺃ | ب فبرهن أن ﺃ جـ | ب جـ.

٤) أوجد كل الحلول الصحيحة س. ي للمعادلة

س ي + ٥ س – ٨ ي = ٧٩

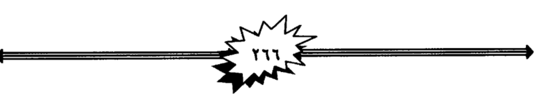
٥) إذا كان ﺃ، ب ∋ ص وإذا كان ﺃ س+ ب ي =١، فبرهن أن (ﺃ، ب)=١

٦) إذا كان س، ي، ت أعداد صحيحة غير صفرية و ﺃ = ت س، ب = ت فبرهن أ ن س، ي أوليان نسبياً إذا وإذا كان فقط ت = ± (ﺃ ، ب)

٧) برهن أن (ن ن + ١) = ١ لكل عدد صحيح ن.

٨) وضح أن (ن – ١، ن ٢ – ن + ١) يساوي ١ ﺃ ٣ لكل ن ∋ ص

٩) أوجد الأعداد الصحيحة س، ي حيث أن ٨٠٣ س – ١٥٤ ي = ٣٣



١٠) معاملات ذات الحدين في التعبير

$$(س+١)^{ن} = \binom{ن}{ن} س^{ن} + \binom{ن}{ن-١} س^{ن-١} + ... + \binom{ن}{١} س + \binom{ن}{٠}$$

حيث المعامل $\binom{ن}{ك} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢).....(ن-ك+١)}{ك!}$

برهن أن

$م \,|\, \binom{م}{ك}$ حيث م عدد أولي و $٠ < ك < م$

١١) إذا كان (أ ، ب) = م حيث م عدد أولي، فأوجد

١) $(أ^{٢}، ب)$ ٢) $(أ^{٢}، ب^{٢})$ ٣) $(أ^{٣}، ب^{٣})$

١٢) إذا كان ن عدد صحيح موجب، فوضح أن

١) $٢ \,|\, (ن^{٢} - ن)$ ٢) $٦ \,|\, (ن^{٣} - ن)$

١٣) برهن أن حاصل ضرب ثلاث أعداد صحيحة متالية يقبل القسمة على ٦.

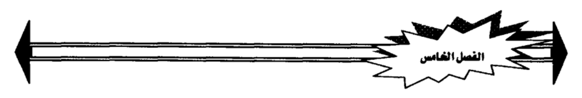
١٤) برهن أن (أ، ب) = (أ، ب + ل أ) لكل $ل \in ص$.

١٥) إذا كان (أ، ب) =١ فبرهن أن $(أ^{٣} + ب^{٣}، أ^{٢} + ب^{٢}) \,|\, (أ، ب)$

التطابق (Congruence)

تعريف: إذا كان م عدد صحيح موجب، فإن العدد الصحيح أ يطابق العدد الصحيح ب مقياس س م إذا كان م | (أ − ب) ، ويكتب $أ \equiv ب$ (mod م)

هناك خواص لعلاقة التطابق توضح أن التطابق علاقة متكافئة، وهي:



١) ٲ ≡ ٲ (mod م) (خاصية التعاكس)

٢) إذا كان ٲ ≡ ب (mod م)، فإن ب ≡ ٲ (mod م) (خاصية التماثل)

٣) إذا كان ٲ ≡ ب (mod م)، و ب ≡ جـ (mod م)، فإن ٲ ≡ جـ (mod م) (خاصية الانتقال)

٤) إذا كان ٲ ≡ ب (mod م)، فإن ٲ جـ ≡ ب جـ (mod م) لأي عدد صحيح جـ.

برهان هذه الخواص هو تطبيق مباشر لتعريف التطابق واستخدام خواص القسمة.

النظرية التالية توضح أن العددان الصحيحان المتطابقان بمقياس م يكون لهما نفس الباقي عند القسمة على م والعكس أيضاً صحيح.

مبرهنة: إذا كان ٲ، ب ∍ ص ، فإن ٲ = ب (mod م) إذا وإذا كان فقط للعددان ٲ ، ب نفس الباقي عند القسمة على م.

البرهان:

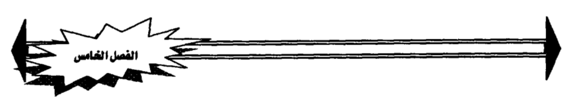
من خوارزمية القسمة نجد أن هناك عددان صحيحان ر ١، ل١ حيث ٠ ≤ ر١ > م و

(١) أ = ل ١ م + ر١

كذلك هناك عددان صحيحان ر٢، ل ٢ حيث ٠ ≤ ر٢ > م و

(٢) ب = ل ٢ م + ر٢





يطرح (٢) من (١) نجد أن

(٣) ﻫ − ب = (ل ١ − ل ٢) م + (ر١− ر ٢)

إذا كانﻫ = ب (mod م)، فإن م |ﻫ − ب وهذا يعني أن ر١− ر٢=٠في (٣)

ومن ذلك ر١ − ر٢

إذا كان ر١ = ر ٢، فإن ر١− ر٢ = ٠ وتعويض ذلك في (٣) ينتج أ − ب = (ل١ − ل٢)م

وهذا يعني أن

م | ﻫ − ب ومنه نصل إلى أن ﻫ = ب (mod م)

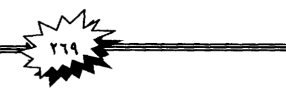
النتيجة التالية توضح أن عملية الجمع وعملية الضرب تحافظان على عملية التطابق

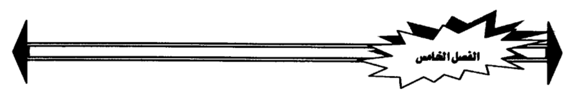
مبرهنة: إذا كان ﻫ = ب (mod م) و جـ = د (mod م)، فإن: ١) ﻫ + جـ = ب + د (mod م)   ٢) ﻫ جـ = ب د (mod م)

البرهان:

١) إذا كان ﻫ = ب (mod م) و جـ = ب (mod م)، فإن م | (ﻫ − ب) وم/ (جـ − د)، ومن خواص القسمة نجد أن م | (ﻫ − ب) + (جــ − د) = (ﻫ + جـ) ب + د)

٢) الآن ﻫ جـ − ب د = ﻫ جـ + ب جـ − ب د





(ﺃ – ب) جـ + ب (جـ – د)

وحيث ﺃ م |(ﺃ – ب) و م| (جـ – د) فإن م |(ﺃ جـ – ب د) وهذا يعني أن ﺃ جـ = ب د (mod م) يمكن تعميم هذه النظرية كما يلي:

إذا كان $ﺃ_ي$ ≡ $ب_ي$ (mod م) حيث ي ١، ٢، ٠٠٠، ن، فإن:

١) $\sum_{ي=1}^{ن} ﺃ_ي = \sum_{ي=1}^{ن} ب_ي$ Mod م

٢) $\prod_{ي=1}^{ن} ﺃ_ي \equiv \prod_{ي=1}^{ن} ب_ي$ Mod م

بصفة خاصة إذا كان $ﺃ_ي$ = أ لكل ي و $ب_ي$ = ب لكل ١ ≤ ي ≤ن

فإنه إذا كان ﺃ = ب (modم) نحصل على

١) ن ﺃ = ن ب (modم)

٢) $ﺃ^{ن} = ب^{ن}$ (modم)

من خواص التطابق انه إذا كان ﺃ = ب (mod م)، فإن ﺃ جـ = ب جـ (mod م) لأي عدد صحيح جـ لكن عكس هذه الحقيقة غير صحيح بدون وضع شروط معينة على العدد الصحيح جـ.

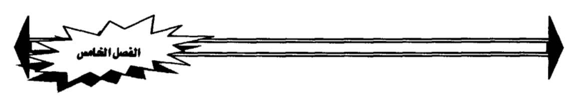
النتيجة التالية توضح هذا الشرط.

مبرهنة: إذا كان ﺃ جـ = ب جـ (mod م) (جـ ، م) = ١، فإن ﺃ = ب (modم)

البرهان:

من المفروض نجد أن م | (ﺃ – ب) جـ وهذا يعني أن هناك عدد صحيح ك حيث أن (ﺃ – ب) جـ = ك م وحيث إن (جـ م) = ١فإن م | (ﺃ – ب)





وبالتالي يكون ɒ ≡ ب (mod م)

التعريف التالي يوضح أن علاقة التطابق تكون فصول متطابقة

> تعريف: لنفرض أن أ عدد صحيح .
> المجموعة [ɒ]م = { س ∋ ص س ≡ ɒ (mod م) }
> تسمى فصل التطابق المحدد بالعنصر ɒ تحت المقياس م

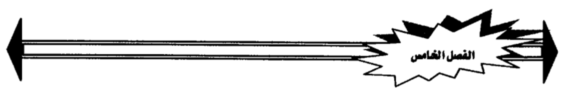
إذا كان ɒ ∋ ص فإن س ∋ [ɒ] م يعني أن س ≡ ɒ (mod م)، وهذا يعني أن م | (س− ɒ) ومنه نصل إلى أن هناك عدد صحيح ك بحيث أن س− ɒ = ك م، وهذا يعطينا نتيجة مؤداها أن س = ɒ+ ك م حيث ك ∋ ص. فصول التطابق تحققه الخواص التالية:

> مبرهنة: إذا كان ɒ، ب ∋ ص و م عدد صحيح موجب، فإن
> ١) ɒ ∋ [ɒ] م
> ٢) ب ∋ [ɒ] م إذا و إذا كان فقط ɒ ∋ [ɒ] م
> ٣) ب ∋ [ɒ] م يؤدي إلى أن [ɒ]م = [ب] م
> ٤) [ɒ] م ∩ [ب] م ≠ ٠ يؤدي إلى أن [ɒ] م = [ب] م

البرهان:

١) حيث أن ɒ ≡ ɒ (mod م)، فإن ɒ ∋ [ɒ] م





٢) إذا كان ب ∋ [ٲ] م، فإن ٲ ≡ ب مقياس م وهذا يعني أن م | (ب– ٲ) ومن خواص القاسم نجد أن م | – (ب – ٲ) وهذا يعني أن م | (ٲ– ب) والذي يعني أن ٲ ≡ ب (mod م) وهذا بدوره يؤدي إلى أن ٲ ∋ [ب] م.

٣) لنفرض أن ب ∋ [ٲ]م.

معلوم أن ب ∋ [ب] م، وهذا يعني أن [ٲ]م ⊆ [ب] م ومن (٢) نعلم أنه إذا كان ب ∋ [ٲ] م، فإن أ ∋ [ب] م ومن المفروض يكون ٲ ∋ [ٲ] م وهذا يؤدي إل أن [ب] م ⊆ [ٲ] م إن [ٲ]م = [ب] م.

٤) إذا كان [ٲ] م ∩ [ب] م ≠ ٠، فإن هناك س ∋ [ٲ]م، س ∋ [ب] م وهذا يؤدي إلى أن [ٲ] م = [س] م وكذلك [ب] م = [س]م والذي بدوره يؤدي إلى أن [ٲ] م =[ب] م.

الخاصية الأخيرة في النظرية السابقة توضح أن أي فصلين متطابقين إما أن يكونا متساويين أو منفصلين.

تمارين:

١) إذا كان ن | م حيث ن > ٠ و ٲ ≡ ب (mod م)، فبرهن أن ٲ ≡ ب (mod ن).

٢) أوجد الباقي عند تقسيم

ٲ^٧ على ٧ لكل ٲ حيث ٠ ≤ ٲ < ٧



٣) وضح أنه إذا كان ا ≡ ب (m mod)، فإن (ا، م) = (ب، م)

٤) حل التطبيقات التالية:

١) ٤ س ≡ ٢ (٦ mod)   ٢) س^{٢} ≡ ١ (١٠ mod)

٣) ٣ س ≡ ٨٠٠ (١١ mod)   ٤) ٤س ≡ ٤ (٦ mod)

٥) إذا كان م عدد صحيح، فبرهن أن م^{٢} ≡ ٠ (٤ mod) أو م^{٢} ≡ ١(٤ mod)

٦) أوجد أصغر عدد موجب صحيح ن حيث أن ٣^{٢} ≡ ن (١١ mod)

٧) أوجد أصغر عدد صحيح موجب ن حيث أن ٣١٢ = ن (٧ mod)

٨) إذا كان م عدد أولى و (ا، م) = ١، فبرهن أن ا^{٢} ١ (م mod) يؤدي إلى أن ا = ± ١ (م mod)

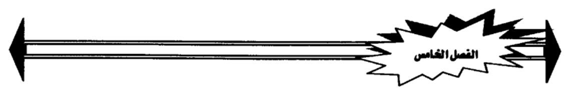
٩) ما هو الباقي عند قسمة ٢^{٥٠} – ١ على ٢^{٥} – ١ = ٢٣١

١٠) وضح أن ١٤| (٣$^{٤ن+٢}$ + ٥$^{٢ن+١}$)

الأعداد المركبة (Complex Numbers)

على الرغم من أن نظام الأعداد الحقيقية مناسب لحل الكثير من المسائل الفيزيائية والعلمية المختلفة، إلا أن هناك بعض العيوب وخصوصاً عندما يتعلق الأمر بحل بعض المعادلات مثل س^{٢} + ١ = ٠ لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب، لذلك تحتاج إلى نظام يحتوي على نظام الأعداد الحقيقية وله خاصية تلافي بعض العيوب مثل التي ذكرت سابقاً.

هذا النظام هو نظام الأعداد المركبة جـ الذي يتكون من الأزواج المرتبة (س، ص) حيث س، ص ∈ح، فإذا اعتبرنا ا = (٠، ١)، فإن الزوج المرتب



(س، ص) يمكن التعبير عنه على الشك س + أ ص، ولذلك ج = { س + ﺃ ص : س، ص ∋ ح }

لاحظ أن كل عدد حقيقي س هو العدد المركب س + ﺃ (٠) أو النقطة (س،٠) على المحور السيني س والذي يسمى المحور الحقيقي، وكل نقطة على محور الصادات الذي يسمى المحور التخيلي هو على الشكل (٠، ص) أو ٠+ ﺃص.

يعبر عادة عن العدد المركب س + ﺃص بحرف واحد مثل ع = س + ص

هناك بعض العمليات الجبري على الأعداد المركبة نذكر منها:

إذا كان $ع_١ = س_١ + ﺃ ص_١$، $ع_٢ = س_٢ + أ ص_٢$، $ع_٣ = س_٣ + ﺃص_٣$ أعداد مركبة، فإن

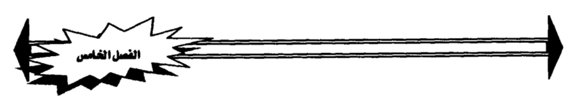
١) $ع_١ = س_١ + ﺃص_١ = س_٢ + ﺃص_٢ = ع_٢$ إذا كان فقط $س_١ = س_٢$ و $ص_١ = ص_٢$.

٢) $ع_١ + ع_٢ = (س_١ + س_٢) + أ (ص_١ + ص_٢)$

٣) $ع_١ ع_٢ = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + ﺃ (س_٠ ص_٢ + س_٢ ص_١)$

٤) العدد المركب ٠ = ٠ + ﺃ (٠) هو المحايد الجمعي، أي أن ع + ٠ = ٠ + ع = ع لأي عدد مركب ع.

٥) لكل عدد مركب ع = س + ﺃص هناك عدد مركب -ع = - س - ﺃ ص يسمى المعكوس الجمع للعدد المركب ع حيث ع + (-ع) = ٠



٦) إذا كان λ ∋ ح، فإن λ ع = λ س + ا λ ص

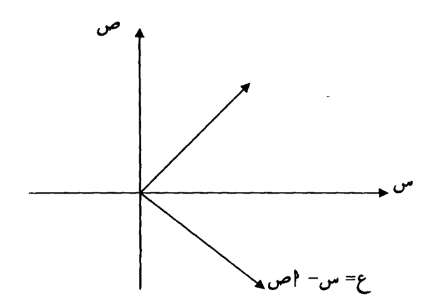
٧) عملية الجمع عملية تنسيقية، أي أن (ع١ ع٢) + ع٣ = ع١ + (ع٢ + ع٣)

وكذلك عملية لضرب عملية تنسيقية أي أن (ع١ ع٢) ع٣ – ٣ = ع١ (ع٢ ع٣)

مرافق العدد المركب:

إذا كان ع = س + اص عدد مركب، فـإن مرافـق العـدد المركـب ع هـو العدد المركب

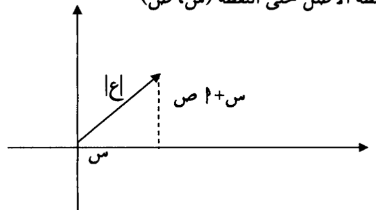
ص̅=س–اص، أي أن مرافق العدد المركب هو صورته في المرآة وهي محور السينات في هذه الحالة



يمكن توضيح المعكوس الضربي للعدد المركب غير الصفري ع وهو $\text{ع}^{-1} = \frac{1}{\text{ع}}$ بعد تعريف مرافق العدد المركب كما يلي:

$$\text{ع}^{-1} = \frac{1}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{س}+\text{ت ص}} \cdot \frac{\text{س}-\text{ت ص}}{\text{س}-\text{ت ص}} = \frac{\text{س}-\text{ت ص}}{\text{س}^{2}+\text{ص}^{2}}$$

إذا كان ع = س+ ت ص، فإن القيمة المطلقة للعدد المركب ع وتكتب | ع | هي المسافة من نقطة الأصل حتى النقطة (س، ص)



$$|\text{ع}| = \sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}}$$

لاحظ أن $\text{ع}\,\bar{\text{ع}} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} = |\text{ع}|^{2}$

ولهذا يمكن وضع صيغة أخرى لمعكوس العدد المركب غير الصفري ع كما يلي

$$\text{ع}^{-1} = \frac{1}{\text{ع}} = \frac{\bar{\text{ع}}}{|\text{ع}|^{2}}$$

النظرية التالية توضح أهم خواص مرافق العدد المركب وعلاقة ذلك بالقيمة المطلقة للعدد المركب.

مبرهنة:

إذا كان ع = س ١ + hص، و = س ٢ + أص٢ عددان مركبان، فإن:

١) $ع=\overline{(\overline{ع})}$

٢) $٢س_١ = \overline{ع}+ع$، $٢أص_١ = \overline{ع}-ع$

٣) $\overline{و+ع}=\overline{و}+\overline{ع}$، $\overline{و\,ع}=\overline{و}\,\overline{ع}$

٤) $\overline{\left(\frac{ع}{و}\right)}=\frac{\overline{ع}}{\overline{و}}$ **بشرط أن و ≠ ٠**

٥) $\overline{ع}=ع$ **إذا وإذا كان فقط ع عدد حقيقي**

٦) $|ع|=|\overline{ع}|$، $|-ع|=|ع|$

٧) $|و\,ع|=|ع|\,|و|$ **و** $\left|\frac{ع}{و}\right|=\frac{|ع|}{|و|}$ **بشرط أن و ≠ ٠**

٨) $|ع+و|\leq|ع|+|و|$

البرهان:

١) **لاحظ أن** $\overline{ع}=س-أص$ **ولذلك فإن:** $\overline{(\overline{ع})}=س+أص=ع$

٢) $ع+\overline{ع}=(س_١+أص_١)+(س_١-أص_١)=٢س$ **وكذلك:**

$ع-\overline{ع}=(س_١+أص_١)-(س_١-أص_١)=٢أص_١$

٣) $ع+و=(س_١+أص_١)+(س_٢+أص_٢)=س_١+س_٢+أ(ص_١+ص_٢)$

وكذلك فإن:

$$\overline{ع+و}=(س_١+س_٢)-أ(ص_١+ص_٢)=س_١-أص+س_٢-أص_٢=\bar{ع}+\bar{و}$$

الآن $ع\,و=(س_١+أص_١)(س_٢+أص_٢)=س_١س_٢-ص_١ص_٢$ $+أ(س_١ص_٢+س_٢س_١)$ وبذلك فإن:

$$\overline{ع و}=س_١س_٢-ص_١ص_٢-أ(س_١ص_٢+س_٢ص_١)=(س_١-أص_١)(س_٢-أص_٢)=\bar{ع}\,\bar{و}$$

٤) $$\frac{ع}{و}=\frac{س_١+أص_١}{س_٢-أص_٢}\cdot\frac{س_٢-أص_٢}{س_٢-أص_٢}=\frac{س_١س_٢+ص_١ص_٢+أ(-س_١ص_٢+س_٢ص_١)}{س_٢^٢+ص_٢^٢}$$

ومن ذلك نجد أن

$$\overline{\left(\frac{ع}{و}\right)}=\frac{س_١س_٢+ص_١ص_٢-أ(س_١ص_٢+س_٢ص_١)}{و\,\bar{و}}=\frac{\bar{ع}\,و}{و\,\bar{و}}=\frac{\bar{ع}}{\bar{و}}$$

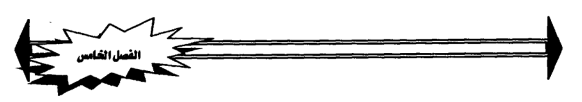
٥) إذا كان $ع=\bar{ع}$، فإن $س_١+أص=س_١-أص$ وهذا لا يحصل إلا إذا كان $ص=٠$، أي أن $ع=س_١+أ(٠)=س_١$ وهذا يعني أن ع عدد حقيقي.

أما الاتجاه الأخر، فإنه إذا كان ع عدد حقيقي فإن ذلك يعني أن $ع=س_١+أ(٠)$ وهذا يعني أن $\bar{ع}=س_١+أ(٠)$ ويذلك فإن $\bar{ع}=ع$

٦) يترك للقارئ ٧) يترك للقارئ ٨) يترك للقارئ

التحليل القطبي للعدد المركب

إذا كان $ع=س+أص$ عدد مركب، فإنه إذا كان $ر=|ع|=\sqrt{س^٢+ص^٢}$



وكانت θ هي الزاوية التي يصنعها المتجه ع مع محور السينات أو يوازيه، فإن

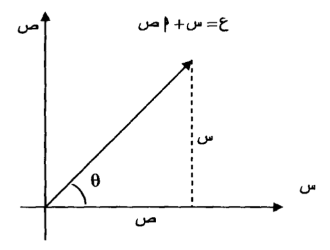
س = ر جتا θ

ص = ر جا θ

لذلك فإن ع = س + أ ص = ر جتا θ + أ ر جا θ = ر (جتا θ + أ جا θ)

وهذا ما يسمى بالتمثيل القطبي للعدد المركب ع، أي أن:

ع = ر (جتا θ + أ جا θ)

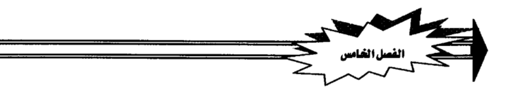


لاحظ أن ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

والزاوية θ لها قيم عديدة، وجدنا قيمة للزاوية θ وأضفنا إليها أي مضاعف صحيح للزاوية ٢π

نصل إلى قيمة أخرى للزاوية θ، فإذا كانت θ قيمة للزاوية θ، فإن القيمة العامة للزاوية θ هي θ = $\theta_{\circ}$ +٢ن π





حيث ن = ٠، ± ١، ± ٢،.....

القيمة الرئيسية للزاوية θ هي القيمة التي تقع بين $-\pi, \pi$

يمكن القيام بالعمليات الجبرية على الأعداد المركبة في شكلها القطبي، فإن كان:

$$ع_2 = ر_2 \text{ (جتا } \theta_2 + \text{ أ جا } \theta_2) \text{ و } ع_1 = ر_1 \text{ (جتا } \theta_1 + \text{ أ جا } \theta_1)$$

فإن

$$ع_1 ع_2 = ر_1 ر_2 [\text{ جتا } (\theta_1 + \theta_2) + \text{ أ جا } (\theta_1 + \theta_2)]$$

و

$$\frac{1}{ع_1} = \frac{1}{ر_1} [\text{ جتا}(-\theta_1) + \text{أ جا}(-\theta_1)]$$

ولهذا فإن:

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ر_1}{ر_2} [\text{ جتا}(\theta_1 - \theta_2) + \text{ أ جا}(\theta_1 - \theta_2)]$$

ومن القوانين السابقة يمكن استنتاج أنه إذا كان ع = ر (جتا θ + أ جا θ)

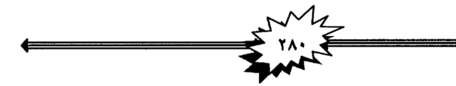
فإن

$$ع^{ن} = ر^{ن} [\text{ جتا (ن } \theta) + \text{ أ جا (ن } \theta)]$$

حيث ن عدد صحيح موجب. كذلك

$$ع^{-ن} = ر^{-ن} [\text{ جتا (- ن } \theta) + \text{ أ جا (- ن } \theta)]$$

هذه القوانين تستخدم لحل الكثير من المعادلات التي تحتوي على أعداد مركبة



مثال (١) : أوجد $(\text{١} + \text{أ})^{\text{٢٠}}$

الحل: $\theta = \frac{\pi}{\text{٤}}$, $\text{ر} = \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٢}}$

إذن $\text{ع}^{\text{ن}} = \text{ر}^{\text{ن}} [\ \text{جتا}\ (\text{ن}\,\theta) + \text{أ}\ \text{جا}\ (\text{ن}\,\theta)\ ]$

$$(\text{١}+\text{م})^{\text{٢٠}} = (\sqrt{\text{٢}})^{\text{٢٠}} \left[\ \text{جتا}\ \text{٢٠} \left(\frac{\pi}{\text{٤}}\right) + \text{م}\ \text{جا}\ \text{٢٠} \left(\frac{\pi}{\text{٤}}\right)\right]$$

$$= \text{٢}^{\text{١٠}} (\ \text{جتا}\ \pi + \text{م}\ \text{جا}\ \pi)$$

$$= -\text{٢}^{\text{١٠}} = -\text{١٠٢٤}$$

تمارين:

س١) أنجز العملية المعطاه في كل حالة

أ) $(\text{٣} + \text{٤}\ \text{م})\ (\text{١} + \text{٢}\ \text{م})$

ب) $(\text{٣} + \text{٤}\ \text{م})\ (\text{١} - \text{٢}\ \text{م})$

جـ) $(\text{٣} - \text{٤}\ \text{م})^{\text{٢}}\ (\text{٣} + \text{٤}\ \text{م})^{\text{٢}}$

س٢) حل المعادلة $\text{س}^{\text{٢}} - \text{ص}^{\text{٢}} - \text{٢س ص م} = -\text{م}\ \text{س} + \text{ص}$

س٣) أوجد $\left[(\text{١}+\text{م}) + \frac{\text{١}}{\text{١}+\text{م}}\right]^{\text{٢}}$

س٤) أوجد $\left|\frac{\text{م} + (\text{٣}+\text{٤م})(\text{١}+\text{م})}{\text{٣}-\text{٤م}}\right|$

س٥) حول العدد المركب إلى الشكل القطبي في كل حالة

أ) $\sqrt{3+\text{ت}}$

ب) $\text{ت}2+\left(\frac{1+\text{ت}}{1-\text{هـ}}\right)^{3}$

س٦) أوجد

أ) $(1 + 2\text{أ})^{19}$ ب) $\left(-1-\sqrt{3}\text{ت}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\text{ت}$

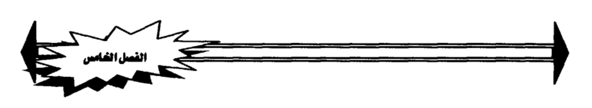
جـ) $(3 + 4\text{أ})^{12}$ $(1+\text{أ})^{-12}$ د) $(16\text{ت})^{\frac{1}{4}}$

٧) أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها هما ت، ١-ت

٨) حل المعادلة $\text{ع}^{2} - \text{ت} = -1$

٩) حل المعادلة $3\text{س}^{4} - 2\text{س}^{3} + 12\text{س}^{2} - 8\text{س} = 0$

١٠) أوجد $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ت}\right)^{30}$



تمارين

١) أوجد (م ، ب) وعبر عن ذلك على الشكل م س + ب ص في كل حالة

أ) (- ٤ س، ١١٦)　　　　ب) (٢٦، ٧٢)

جـ) (٢٥، ٧٢)　　　　د) (١٠٥٣٠، ٢٥٢٠)

٢) أوجد [ا، ب] في كل حالة

أ) [٩٥٢، ٧٣١]

ب) [٥٠٤، ١٣٢]

جـ) [٢٩٢٤، ٢٢٠]

س٣) إذا كان م ، ب ∍ ص حيث م س + ب ص= ١، س١ ص ∍ ص

فبرهن أن (م، ب) = ١

س٤) برهن أن $\sqrt{3}$ عدد غير قياسي

س٥) أوجد س، ص حيث أن ٨٠٣ س-١٥٤ ص = ١



س٦) برهن أن مجموعة الأعداد الأولية مجموع غير منتهية.

س٧) إذا كان م > ١، فبرهن مستخدماً الاستقراء الرياضي أن

$$١+م+م^{٢}+......+م^{ن}=\frac{م^{ن+١}-١}{م-١}$$

٨) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن

$$\frac{١}{١(٢)}+\frac{١}{٢.(٣)}+....+\frac{١}{ن(ن+١)}=\frac{ن}{ن+١}$$

٩) استخدم الاستقراء الرياضي لبرهنة أن

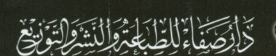
$ن^{٣}-ن$ يقبل القسمة على ٣

الرياضيات





9789957247119





دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع
المملكة الأردنية الهاشمية - عمّان - شارع الملك حسين
مجمع الفحيص التجاري - هاتف : 4611169 6 962+
تلفاكس: 4612190 6 962+ ص.ب 922762 عمّان 11192 الأردن
E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net